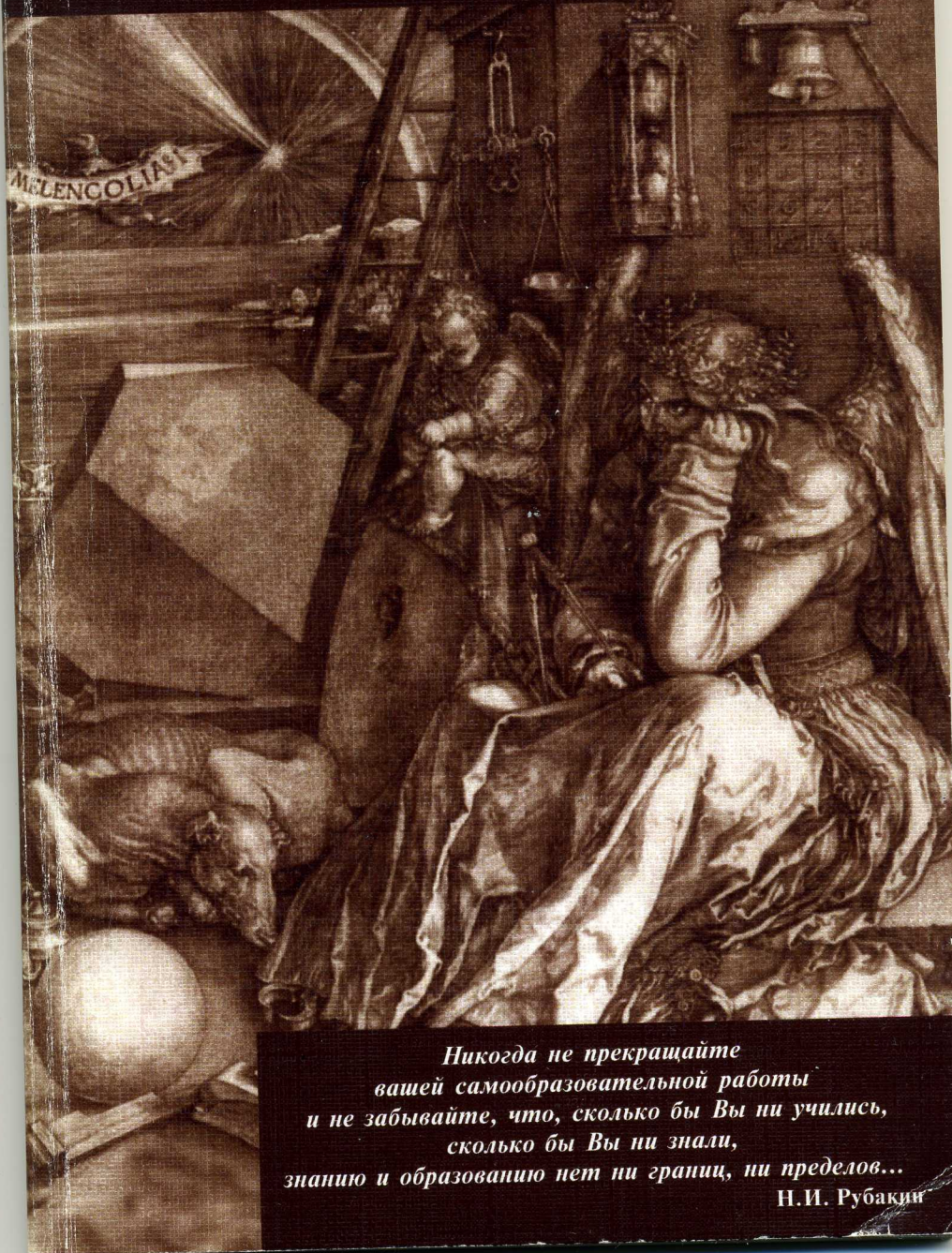


**А.А. ЛОКШИН, В.Ф. СИБАЕВА**  
**ЧТО ТАКОЕ ВЕЛИЧИНА**



*Никогда не прекращайте  
вашей самообразовательной работы  
и не забывайте, что, сколько бы Вы ни учились,  
сколько бы Вы ни знали,  
знанию и образованию нет ни границ, ни пределов...*

**Н.И. Рубакин**

ББК 22.130

Л73

**Локшин А.А., Сибеева В.Ф.**

Л73      Что такое величина? / А.А. Локшин, В.Ф. Сибеева. —  
М.: Вузовская книга, 2006. — 80 с.: ил.

ISBN 5-9502-0203-1

В пособии, адресованном старшеклассникам и студентам-первокурсникам педагогических вузов, рассказывается о важнейших величинах, с которыми непосредственно сталкивается человек в своем повседневном опыте. Особое внимание обращено на логику введения понятий длины, времени и массы.

ББК 22.130

**Локшин Александр Александрович  
Сибеева Венера Фатовиевна**

### **ЧТО ТАКОЕ ВЕЛИЧИНА**

Книга издана в авторской редакции

Компьютерная верстка *А.К. Вартановой, П.С. Корсунской*

---

Подписано в печать 31.03.2006.  
Печать офсетная. Формат 84×108/32  
Усл. печ. л. 4,2. Тираж 300 экз.

---

ЗАО «Издательское предприятие «Вузовская книга»  
125993, Москва А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе д. 4,  
МАИ, Главный административный корпус, к. 301а.  
Тел. 158-02-35. E-mail: vbook@mai.ru

ISBN 5-9502-0203-1

© Локшин А.А., Сибеева В.Ф., 2005  
© ЗАО «Издательское предприятие  
«Вузовская книга», 2006

## СОДЕРЖАНИЕ

---

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТЕРМИНЫ .....	5
§ 1. ЭЙЛЕР О ВЕЛИЧИНАХ. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ .....	6
§ 2. АКСИОМЫ КОЛМОГорова — АЛЕКСАНДРОВА .....	8
§ 3. ТЕОРЕМЫ О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СКАЛЯРНО-АДДИТИВНЫХ ВЕЛИЧИНАХ .....	10
§ 4. ДЛИНА: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ .....	20
§ 5. ДЛИНА: ПОПЫТКА СОЕДИНИТЬ ТЕОРИЮ С ПРАКТИКОЙ .....	24
§ 6. ТВЕРДЫЕ ТЕЛА И ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИН ОТРЕЗКОВ .....	27
§ 7. ВРЕМЯ .....	30
§ 8. ВЗАИМОСВЯЗЬ ЛЕТОИСЧИСЛЕНИЙ. ПОЧЕМУ ВРЕМЯ ИДЕТ ВПЕРЕД .....	38
§ 9. МАССА .....	41
§ 10. УГОЛ И ЕГО ВЕЛИЧИНА .....	45
§ 11. ПЛОЩАДЬ И ОБЪЕМ .....	49
§ 12. РАВНОВЕЛИКОСТЬ И РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ .....	57
§ 13. ПЕРЕМЕЩЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. СИСТЕМА ОТСЧЕТА .....	60
§ 14. РАВНОМЕРНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ. СКОРОСТЬ КАК ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ .....	62
§ 15. РАВНОМЕРНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ВДОЛЬ ПРЯМОЙ. ДРУГОЙ ВЗГЛЯД НА СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ .....	66
§ 16. СТОИМОСТЬ .....	68
§ 17. ЦЕНА .....	70
ДОБАВЛЕНИЕ 1. Локшин А.А., Сагомоян Е.А. Определение величины в случае неустранимых погрешностей измерения .....	72
ДОБАВЛЕНИЕ 2. Локшин А.А., Сагомоян Е.А. О размерности величин .....	74
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	79

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Эта книга посвящена величинам, которые изучают в школе: длине, времени, массе, площади, стоимости и т. п. Она адресована студентам-первокурсникам педагогических институтов, а также старшеклассникам, которые интересуются математикой и физикой. Авторы могут спросить: зачем собирать под одной обложкой все эти величины и искать у них что-то общее? Какой в этом смысл?

Ответ состоит в следующем. Понятие величины является для математики (и физики) таким же фундаментальным, как понятие числа. Поэтому полезно сравнить свойства разнообразных величин между собой и выяснить, что есть у них общего, чем они отличаются друг от друга и какая математическая конструкция соответствует понятию «величина».

Сравнивая процедуры, при помощи которых вводятся такие величины, как длина, время и т. п., мы задаем себе неудобные вопросы и развиваем свое критическое мышление.

Мы увидим, что такое, казалось бы, простое понятие, как длина, таит в себе массу неожиданностей: длину легко определить в абстрактном евклидовом пространстве, но как только мы хотим привязать это определение к окружающей нас реальности, длина начинает «сопротивляться». Преодолеть возникающие трудности удастся, лишь опираясь на счастливую случайность — существование в окружающем нас мире твердых тел. Если бы понятие длины захотели ввести разумные желеобразные жители океана, они, скорее всего, не сумели бы этого сделать!

Не менее — а возможно, более интересную величину представляет собой время. Не так-то просто объяснить, что означает выражение: «равные промежутки времени». То, что мы вообще в состоянии ответить на этот вопрос, связано с высокой степенью равномерности вращения Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца. Жители планеты, неравномерно движущейся по плохо предсказуемой орбите и неравномерно вращающейся вокруг своей оси, вряд ли смогли бы догадаться, что время не просто идет вперед, но делает это в некотором смысле равномерно. Сомни-

тельно, чтобы они смогли изобрести часы; но даже если бы они их изобрели, то не смогли бы ими пользоваться. Как это ни удивительно, но планеты, о которых шла речь выше, действительно существуют. (Другое дело, что на них, скорее всего, никто не живет.) Это планеты, движущиеся в поле тяготения двойных звезд. Орбиты таких планет уже не являются эллипсами (и тем более — окружностями), а представляют собой пространственные кривые, плохо поддающиеся математическому описанию. Если вещество внутри такой планеты распределено неравномерно, то характер ее движения будет совершенно непредсказуемым [1].

Столкнемся мы и с более приземленными, но любопытными вопросами. Пусть, например, портной Иванов шьет десять костюмов в год, а портной Петров — двадцать. Тогда их общая производительность, очевидно, равна

$$10 \frac{\text{костюмов}}{\text{год}} + 20 \frac{\text{костюмов}}{\text{год}}.$$

Не вызывает сомнений осмысленность этого выражения, а также то, что

$$10 \frac{\text{костюмов}}{\text{год}} + 20 \frac{\text{костюмов}}{\text{год}} = 30 \frac{\text{костюмов}}{\text{год}}.$$

Может показаться, что величины одного типа (или, как принято говорить, одного рода) всегда можно складывать. Однако это не так.

Например, нельзя складывать цены. Выражение

$$10 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}} + 20 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}}$$

вовсе не равно  $30 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}}$ . Оно просто не имеет смысла.

В заключение отметим, что наше изложение нигде не выходит за рамки элементарной физики и соответствует в основном подходу к описанию величин, предложенному А.Н. Колмогоровым и, независимо, А.Д. Александровым (см., например, [2, 3]). С интересной конкурирующей теорией величин, принадлежащей Н.Я. Виленкину, читатель может ознакомиться по [4, 5].

Авторы  
Москва, 2005 г.



**УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТЕРМИНЫ**

1. Гладкая кривая — кривая, к которой можно провести касательную в каждой ее точке.
2. Кусочно-гладкая кривая — кривая, состоящая из конечного числа кусков гладких кривых.
3.  $a \in A$  — элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$ .
4.  $A \subset B$  — множество  $A$  является подмножеством множества  $B$  (каждый элемент из  $A$  одновременно является элементом из  $B$ ).
5.  $A \cap B$  — пересечение (общая часть) множеств  $A$  и  $B$ .
6.  $A \cup B$  — объединение множеств  $A$  и  $B$  (совокупность элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств).

## § 1. ЭЙЛЕР О ВЕЛИЧИНАХ. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

---

Вот как определял понятие величины знаменитый математик Леонард Эйлер на первых страницах своей книги «Основания алгебры», написанной им более двухсот лет тому назад (см. [6]):

«Все то, что увеличиться или уменьшиться может, или к чему нечто прибавить или от чего нечто отнять можно, называется *величина*, или *количество*».

По сему сумма денег есть количество, ибо к оной прибавить и от оной убавить можно.

Равным образом, вес и другие сему подобные вещи суть также величины.

И так находятся весьма многие различных родов величины, кои все исчислить было бы весьма трудно; и отсюда происходят различные части *Математики*, из коих каждая о особливом роде величины рассуждает, ибо *Математика* вообще есть *Наука о количествах*, и в которой изыскиваются средства к измерению оных.

Но количества определить или измерить нет иного средства, как, взяв некоторое количество того же рода за известное, изыскать его отношение к оному меримому количеству».

В наши дни наукой о величинах уже следовало бы считать не современную математику, а прежде всего физику, но в остальном определение Эйлера нисколько не устарело.

В основном, следуя Эйлеру, мы примем:

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** *Величина* — это такая характеристика объекта (предмета или процесса), которую можно точно измерить.

**Замечание.** Мы не исключаем того, что в процессе измерения величины приходится производить и вычисления.

Предыдущее определение нуждается, однако, в некоторых дополнительных уточнениях, которые мы сейчас приведем.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.** Величины, характеризующие одно и то же свойство объектов, называются *величинами одного рода*, или *однородными величинами*.

Таким образом, длина линейки, ширина шоссе, высота дома, глубина моря — это величины одного рода, а рост человека и его масса величинами одного рода не являются.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.** Если результат измерения величины выражается одним числом, то такую величину называют *скалярной*. Если упомянутое число всегда (т. е. для всех величин данного рода) положительно, то измеряемую величину называют *скалярной положительной*.

Скалярными положительными величинами являются, например, длина, время (понимаемое как длительность), масса, площадь, объем.

А вот результат измерения силы выражается, как известно, не одним числом, а тремя. Сила — это не скалярная величина, а *векторная*. Мы же в этой книжке будем иметь дело только со скалярными величинами.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.** Скалярная величина, результат измерения которой есть число 1, называется *единицей измерения*, или *единицей величины* соответствующего рода.

**З а м е ч а н и е 1.** Для большинства величин, рассматриваемых в этой книжке, процедура измерения сводится к сопоставлению некоторого исследуемого объекта с объектом-эталоном. В этом случае соответствующая (т. е. однородная с измеряемой) величина объекта-эталоны и является единицей измерения.

**З а м е ч а н и е 2.** Процедура измерения, о которой шла речь выше, для величин каждого рода конечно же своя.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.** Результат измерения скалярной величины называется ее *численным значением* при данной единице измерения.

Если скалярные величины из некоторой системы однородных величин можно складывать друг с другом, то такие величины называют *скалярно-аддитивными*. Большинство рассмотренных в этой книжке величин — скалярно-аддитивные.

На этом мы заканчиваем предварительное обсуждение вопроса о величинах и переходим к изложению теории положительных скалярно-аддитивных величин, предложенной Колмогоровым и Александровым.



## § 2. АКСИОМЫ КОЛМОГорова — АЛЕКСАНДРОВА

Считая километровые столбы, расставленные вдоль дороги, мы определяем длину пройденного пути; глядя на часы, рассчитываем свое время; по использованному набору гирь узнаем массу взвешиваемого товара. При этом свойства собственно длины, времени и массы представляются нам интуитивно очевидными. Удивительно, однако, то, что свойства величин столь различной природы оказываются с точки зрения математики одними и теми же. Более того, аналогичными свойствами обладают и такие важнейшие величины, как площадь и объем, а также некоторые другие.

Общие свойства перечисленных выше величин были сведены в единое определение А.Н. Колмогоровым и в несколько иной форме А.Д. Александровым.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1** (Колмогоров — Александров).

*Положительной скалярно-аддитивной величиной* называется любой элемент множества  $G$  — системы положительных скалярно-аддитивных величин одного рода, в котором задана операция сложения, подчиненная следующим аксиомам:

**К 1.** Для любых  $a, b \in G$  существует и однозначно определена сумма

$$a + b \in G.$$

**К 2.** Для любых  $a, b \in G$

$$a + b = b + a$$

(коммутативность сложения).

**К 3.** Для любых  $a, b \in G$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(ассоциативность сложения).

**К 4.** Для любых  $a, b \in G$  выполняется одно из трех условий:

либо  $a = b$ ,

либо  $a = b + c$ ,  $c \in G$ ,

либо  $b = a + d$ ,  $d \in G$ .

**Замечание 1.** Если  $a = b + c$ , то говорят, что величина  $b$  меньше величины  $a$  ( $b < a$ ), или, что то же самое,  $a$  больше  $b$  ( $a > b$ ).

Используя отношение «меньше», можно переписать аксиому К 4 в следующем эквивалентном виде:

К 4'. Для любых  $a, b \in G$

либо  $a = b$ ,  
либо  $a < b$ ,  
либо  $b < a$ .

Замечание 2. Если  $a > b$ , т. е.  $a = b + c$ , то величину  $c$  называют *разностью* величин  $a$  и  $b$  и пишут

$$c = a - b.$$

Итак,

$$a = b + c \Leftrightarrow a - b = c.$$

К 5. Для любого  $a \in G$  и любого натурального  $n$  существует  $b \in G$  такое, что

$$nb = a$$

$$\left( \text{здесь } nb = \underbrace{b + b + \dots + b}_n \right).$$

Величина  $b$  обозначается при этом так:

$$b = \frac{a}{n}.$$

К 6 (аксиома Архимеда). Для любых  $a, b \in G$  найдется натуральное число  $n$  такое, что

$$a < nb.$$

К 7 (аксиома непрерывности). Если две последовательности величин

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots < b_n < \dots < b_2 < b_1$$

таковы, что  $b_n - a_n < c$  для любого фиксированного  $c \in G$ , если натуральное  $n$  достаточно велико, то существует единственная величина  $x \in G$  такая, что

$$a_n < x < b_n$$

при всех натуральных  $n$ .

### § 3. ТЕОРЕМЫ О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СКАЛЯРНО-АДДИТИВНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

В этом параграфе мы докажем серию несложных утверждений о величинах, подчиняющихся аксиомам К 1–К 7 из предыдущего параграфа. Всякую ниже  $G$  — система таких величин.

**Утверждение 3.1.** Для любых  $a, b \in G$  и любых натуральных чисел  $m, n$  справедливы соотношения:

$$\text{а) } (m + n)a = ma + na; \quad (3.1)$$

$$\text{б) } m(a + b) = ma + mb; \quad (3.2)$$

$$\text{в) } mna = nma = (mn)a; \quad (3.3)$$

$$\text{г) если } m > n, \text{ то } ma > na \text{ и} \\ (m - n)a = ma - na; \quad (3.4)$$

$$\text{д) если } a > b, \text{ то } na > nb \text{ и} \\ n(a - b) = na - nb; \quad (3.5)$$

$$\text{е) если } na = nb, \text{ то } a = b. \quad (3.6)$$

*З а м е ч а н и е.* Выражения вида  $mna$  мы понимаем как  $m(na)$ .

*Доказательство утверждения 3.1.* Соотношения (3.1)–(3.3) очевидны. Докажем (3.4). В силу определения разности величин достаточно доказать равенство

$$(m - n)a + na = ma,$$

которое в силу (3.2) равносильно тому, что

$$[(m - n) + n]a = ma.$$

Однако справедливость последнего равенства очевидна.

Соотношение (3.5) доказывается аналогично.

Наконец, (3.6) легко доказывается от противного с помощью аксиомы К 4 и соотношения (3.2). ■

**Следствие.** Для любого  $a \in G$  и натурального  $n$  величина  $\frac{a}{n}$  определена единственным образом.

*Доказательство.* Это утверждение непосредственно следует из утверждения 3.1, е). ■

**Утверждение 3.2.** Для любого  $a \in G$  и любых натуральных чисел  $m, n, k, p$  справедливы равенства:

$$\text{а) } \frac{1}{n}ma = m\frac{1}{n}a; \quad (3.7)$$

$$\text{б) } mp\frac{1}{np}a = m\frac{1}{n}a \equiv \frac{m}{n}a; \quad (3.8)$$

$$\text{в) } \frac{1}{n}\frac{1}{m}a = \frac{1}{m}\frac{1}{n}a = \frac{1}{mn}a; \quad (3.9)$$

$$\text{г) } \frac{k}{n}\frac{p}{m}a = \frac{p}{m}\frac{k}{n}a \left(\frac{k}{n}\frac{p}{m}\right)a. \quad (3.10)$$

Замечание. Соотношение

$$m\frac{1}{n}a \equiv \frac{m}{n}a$$

есть определение произведения величины  $a$  на дробь  $\frac{m}{n}$ .

Доказательство утверждения 3.2.

а) Докажем (3.7).

Имеем, используя утверждение 3.1 и определение величины  $\frac{1}{n}a$  (см. аксиому К 5):

$$nm\frac{1}{n}a = (nm)\frac{1}{n}a = (mn)\frac{1}{n}a = mn\frac{1}{n}a = ma.$$

С другой стороны, очевидно, имеем

$$n\frac{1}{n}ma = ma.$$

Приравнивая теперь левые части двух последних соотношений, получаем равенство

$$nm\frac{1}{n}a = n\frac{1}{n}ma,$$

откуда, в силу (3.6), следует (3.7).

б) Соотношение (3.8) доказывается аналогично.

в) Докажем, например, первое из двух равенств (3.9).

Имеем:

$$mn\frac{1}{n}\frac{1}{m}a = m\left(n\frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}a\right)\right) = m\frac{1}{m}a = a.$$

С другой стороны,

$$mn\frac{1}{m}\frac{1}{n}a = mn\left(\frac{1}{m}\frac{1}{n}\right)a = nm\left(\frac{1}{m}\frac{1}{n}\right)a = a.$$

Приравнивая левые части двух последних цепочек равенств, получаем

$$mn\left(\frac{1}{n} \frac{1}{m} a\right) = mn\left(\frac{1}{m} \frac{1}{n} a\right),$$

откуда, в силу (3.6), следует требуемый результат.

г) Соотношение (3.10) легко следует из (3.7)–(3.9). ■

**Утверждение 3.3.** Для любого  $a \in G$  и любых натуральных чисел  $k, m, n, p, s$ , справедливы равенства:

$$\frac{m}{k} \left( \frac{n}{p} + \frac{s}{t} \right) a = \left( \frac{mn}{kp} + \frac{ms}{kt} \right) a = \left( \frac{n}{p} + \frac{s}{t} \right) \frac{m}{k} a. \quad (3.11)$$

*Доказательство.* Докажем первое из двух соотношений (3.11). Имеем очевидную цепочку равенств (см. (3.8)):

$$\begin{aligned} kpt \frac{m}{k} \left( \frac{n}{p} + \frac{s}{t} \right) a &= ptm \left( \frac{n}{p} + \frac{s}{t} \right) a = ptm \frac{nt + sp}{pt} a = \\ &= m(nt + sp)a = (mnt + msp)a. \end{aligned}$$

С другой стороны, учитывая (3.8), получаем

$$kpt \left( \frac{mn}{kp} + \frac{ms}{kt} \right) a = kpt \frac{mnt + msp}{kpt} a = (mnt + msp)a;$$

теперь, приравнивая левые части двух последних цепочек равенств и сокращая на  $kpt$ , получаем требуемый результат.

Второе равенство (3.11) доказывается аналогично. ■

**Утверждение 3.4.** Для любых  $a, b \in G$  и любых натуральных чисел  $k, m, n, p$ , справедливы соотношения:

$$\text{а) } \left( \frac{m}{k} + \frac{n}{p} \right) a = \frac{m}{k} a + \frac{n}{p} a; \quad (3.12)$$

$$\text{б) если } \frac{m}{k} > \frac{n}{p}, \text{ то } \frac{m}{k} a > \frac{n}{p} a \text{ и}$$

$$\left( \frac{m}{k} - \frac{n}{p} \right) a = \frac{m}{k} a - \frac{n}{p} a; \quad (3.13)$$

$$\text{в) } \frac{m}{k} (a + b) = \frac{m}{k} a + \frac{m}{k} b; \quad (3.14)$$

$$\text{г) если } a > b, \text{ то } \frac{m}{k} a > \frac{m}{k} b \text{ и } \frac{m}{k} (a - b) = \frac{m}{k} a - \frac{m}{k} b. \quad (3.15)$$

*Доказательство.* Докажем, например, (3.12). Имеем в силу (3.8)

$$kp \left( \frac{m}{k} + \frac{k}{p} \right) a = kp \frac{mp + nk}{kp} a = (mp + nk) a.$$

С другой стороны, из (3.2) и (3.8) следует, что

$$\begin{aligned} kp \left( \frac{m}{k} a + \frac{n}{p} a \right) &= kp \frac{m}{k} a + kp \frac{n}{p} a = \\ &= mpa + nka = (mp + nk) a. \end{aligned}$$

Приравнявая левые части двух последних цепочек равенств и сокращая на их общий множитель  $kp$ , получаем (3.12).

Соотношения (3.13)–(3.15) доказываются аналогично. ■

*З а м е ч а н и е.* В случае натурального  $\alpha$ , а также в случае, когда  $\alpha$  — положительная рациональная дробь, произведение  $\alpha \cdot a$ ,  $a \in G$ , уже было определено однозначным образом:

$$ma = \underbrace{a + \dots + a}_{m \text{ раз}}; \quad (3.16)$$

$$\frac{m}{n} a = \underbrace{\frac{a}{n} + \dots + \frac{a}{n}}_{m \text{ раз}}. \quad (3.17)$$

Для дальнейшего нам требуется распространить определение произведения  $\alpha \cdot a$  на случай положительного иррационального  $\alpha$ .

Пусть  $\alpha > 0$  — иррациональное число и пусть  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\bar{\alpha}_k\}$  — две последовательности положительных рациональных дробей, такие, что

$$\alpha_1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < \dots < \alpha < \dots < \bar{\alpha}_k < \dots < \bar{\alpha}_2 < \bar{\alpha}_1 \text{ и} \quad (3.18)$$

$$\bar{\alpha}_k - \alpha_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Тогда, в силу утверждения 3.4, б), имеем при любом  $a \in G$

$$\alpha_1 a < \alpha_2 a < \dots < \alpha_k a < \dots < \bar{\alpha}_k a < \dots < \bar{\alpha}_2 a < \bar{\alpha}_1 a,$$

причем, каково бы ни было  $c \in G$ ,

$$\bar{\alpha}_k a - \alpha_k a < c \text{ при } k \rightarrow \infty$$

(последнее соотношение легко следует из аксиомы Архимеда). Поэтому, в силу аксиомы непрерывности, существует единственный элемент  $x \in G$ , такой, что

$$\alpha_k a < x < \bar{\alpha}_k a \text{ при } k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.19)$$



По определению положим теперь

$$x = \alpha a. \quad (3.20)$$

**Утверждение 3.5.** Для любого  $a \in G$  и любого положительного вещественного  $\alpha$  произведение  $\alpha a$  определено однозначным образом.

*Доказательство.* Очевидно, достаточно доказать, что в случае иррационального  $\alpha$  величина  $x$ , определенная в (3.19), не зависит от выбора последовательностей  $\{\alpha_k\}$  и  $\{\bar{\alpha}_k\}$ , монотонно стремящихся к числу  $\alpha$  при  $k \rightarrow \infty$ . Действительно, пусть  $\{\alpha'_s\}$  и  $\{\bar{\alpha}'_s\}$  — две другие последовательности положительных рациональных дробей, удовлетворяющих условиям:

$$\alpha'_1 < \alpha'_2 < \dots < \alpha'_s < \dots < \alpha < \dots < \bar{\alpha}'_s < \dots < \bar{\alpha}'_2 < \bar{\alpha}'_1, \\ \bar{\alpha}'_s - \alpha'_s \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty.$$

Будем рассуждать от противного. А именно, предположим, что найдется  $y \in G$ ,  $y \neq x$ , такое, что

$$\alpha'_s a < y < \bar{\alpha}'_s a \text{ при } s = 1, 2, 3 \dots \quad (3.21)$$

Нетрудно видеть, однако, что для любого фиксированного номера  $k$  найдется такое  $s$ , что  $\alpha_k < \alpha'_s$ , поэтому в силу (3.21)

$$\alpha_k a < y$$

при каждом  $k$ . С другой стороны, для любого фиксированного номера  $k$  найдется такое  $s$ , что  $\bar{\alpha}'_s < \bar{\alpha}_k$ . Поэтому в силу (3.21)

$$y < \bar{\alpha}_k a$$

при каждом  $k$ . Из двух последних соотношений в силу аксиомы непрерывности, очевидно, следует, что  $x = y$ , т. е. мы пришли к противоречию. ■

**З а м е ч а н и е.** Предположим, что в (3.18)  $\alpha$  — натуральное число или положительная рациональная дробь. Тогда произведение  $\alpha a$  определено равенством (3.16) или (3.12); при этом в силу утверждения 3.4

$$\alpha_k a < \alpha a < \bar{\alpha}_k a \text{ при } k = 1, 2, 3 \dots$$

Однако, в силу аксиомы непрерывности, величина  $x$ , удовлетворяющая неравенствам (3.19), единственна. Это означает, что соотношение (3.20) можно считать справедливым при всех положительных вещественных  $\alpha$  (а не только при положительных иррациональных  $\alpha$ ).

Из утверждений 3.1–3.5 вытекает следующий, важный для дальнейшего, результат.

**Теорема 3.1.** Для любых  $a, b \in G$  и любых вещественных положительных  $\alpha, \beta$  справедливы соотношения:

$$\text{а) } (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a; \quad (3.22)$$

$$\text{б) если } \alpha > \beta, \text{ то } \alpha a > \beta a \text{ и } (\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a; \quad (3.23)$$

$$\text{в) } \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b; \quad (3.24)$$

$$\text{г) если } a > b, \text{ то } \alpha a > \alpha b \text{ и } \alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b; \quad (3.25)$$

$$\text{д) } \alpha\beta a = \beta\alpha a = (\alpha\beta)a. \quad (3.26)$$

*Доказательство.* Возможность проверить утверждения а)–г) теоремы мы предоставляем читателю. Докажем утверждение д).

Для определенности будем считать числа  $\alpha$  и  $\beta$  иррациональными. Пусть  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\bar{\alpha}_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$  и  $\{\bar{\beta}_k\}$  — последовательности положительных рациональных дробей, такие, что

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < \dots < \alpha < \dots < \bar{\alpha}_k < \dots < \bar{\alpha}_2 < \bar{\alpha}_1, \quad (3.27)$$

$$\bar{\alpha}_k - \alpha_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty;$$

$$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k < \dots < \beta < \dots < \bar{\beta}_k < \dots < \bar{\beta}_2 < \bar{\beta}_1, \quad (3.28)$$

$$\bar{\beta}_k - \beta_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Тогда, учитывая утверждение б) предыдущей теоремы, очевидно, будем иметь для любого  $a \in G$ :

$$(\alpha_1\beta_1)a < (\alpha_2\beta_2)a < \dots < (\alpha_k\beta_k)a < \dots < (\bar{\alpha}_k\bar{\beta}_k)a < \dots < (\bar{\alpha}_2\bar{\beta}_2)a < (\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1)a,$$

причем, каково бы ни было  $c \in G$ ,

$$(\bar{\alpha}_k\bar{\beta}_k)a - (\alpha_k\beta_k)a < c \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, по аксиоме непрерывности существует и единствен элемент  $x \in G$  такой, что

$$(\alpha_k\beta_k)a < x < (\bar{\alpha}_k\bar{\beta}_k)a$$

при всех  $k$ . В соответствии с введенным выше определением (3.20)

$$x = (\alpha\beta)a. \quad (3.29)$$

Рассмотрим теперь две последовательности величин из  $G$ :  $\{\alpha_k\beta a\}$  и  $\{\bar{\alpha}_k\beta a\}$ . В силу утверждения 3.4, б), очевидно, будем иметь из (3.27):

$$\alpha_1\beta a < \alpha_2\beta a < \dots < \alpha_k\beta a < \dots < \bar{\alpha}_k\beta a < \dots < \bar{\alpha}_2\beta a < \bar{\alpha}_1\beta a;$$

ясно также, что, каково бы ни было  $c \in G$ ,

$$\bar{\alpha}_k\beta a - \alpha_k\beta a < c \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Поэтому в силу аксиомы непрерывности существует элемент  $y \in G$ , такой, что

$$\alpha_k \beta a < y < \bar{\alpha}_k \beta a \quad (3.30)$$

при всех  $k$ , этот элемент мы в соответствии с определением (3.30) считаем равным  $\alpha \beta a$ .

Заметим, однако, что при всех  $k$

$$\beta_k a < \beta a < \bar{\beta}_k a$$

(по определению произведения  $\beta a$ ; см. (3.20)).

Поэтому при всех  $k$  имеем

$$\alpha_k \beta_k a < \alpha_k \beta a < \bar{\alpha}_k \beta a < \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k a. \quad (3.31)$$

Из (3.30), (3.31) вытекает, что при всех  $k$

$$\alpha_k \beta_k < y = \alpha \beta a < \bar{\alpha}_k \bar{\beta}_k a.$$

Следовательно, в силу аксиомы непрерывности

$$y = x,$$

т. е.

$$\alpha \beta a = (\alpha \beta) a.$$

Аналогично доказывается, что

$$\beta \alpha a = (\alpha \beta) a. \blacksquare$$

Пусть теперь  $a$  и  $e$  — две произвольно взятые величины из системы  $G$ . Будем для определенности считать, что

$$e < a. \quad (3.32)$$

Тогда по аксиоме Архимеда найдется такое натуральное  $n_0$ , что

$$n_0 e \leq a < (n_0 + 1)e.$$

Далее, из утверждения 3.4 легко следует, что

$$n_0 e < \left(n_0 + \frac{1}{10}\right)e < \dots < (n_0 + 1)e,$$

откуда в силу аксиомы К 4 вытекает, что найдется такое  $n_1 \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ , что

$$\left(n_0 + \frac{n_1}{10}\right)e \leq a < \left(n_0 + \frac{n_1 + 1}{10}\right)e.$$

Следующий этап аналогичен предыдущему. Из утверждения 3.4 следует, что

$$\left(n_0 + \frac{n_1}{10}\right)e < \left(n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{1}{100}\right)e < \dots < \left(n_0 + \frac{n_1 + 1}{10}\right)e,$$

откуда снова в силу аксиомы К 4 вытекает, что найдется такое  $n_2 \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ , для которого

$$\left(n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100}\right)e \leq a < \left(n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2 + 1}{100}\right)e.$$

Продолжая процесс, заключаем, что существуют две последовательности конечных десятичных дробей  $\{\alpha_k\}$  и  $\{\bar{\alpha}_k\}$  такие, что

$$\alpha_1 e \leq \alpha_2 e \leq \dots \leq \alpha_k e \leq \dots \leq a < \dots < \bar{\alpha}_k e < \dots < \bar{\alpha}_2 e < \bar{\alpha}_1 e,$$

причем

$$\bar{\alpha}_k - \alpha_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда с учетом определения (3.20) ясно, что

$$a = \alpha e, \quad (3.33)$$

где десятичная запись числа  $\alpha$  имеет вид

$$\alpha = n_0, n_1 n_2 \dots$$

Случай  $e > a$  с помощью теоремы 3.1 сводится к только что разобранным случаям  $e < a$ . Действительно, пусть  $e > a$ , тогда по доказанному найдется такое вещественное  $\gamma > 0$ , что

$$e = \gamma a;$$

умножая это равенство на  $\frac{1}{\gamma}$  и переобозначая  $\frac{1}{\gamma}$  через  $\alpha$ , снова приходим к равенству (3.33).

Итак, мы пришли к основному результату этого параграфа.

**Теорема 3.2 (основная).** Выберем в системе  $G$  однородных положительных скалярно-аддитивных величин какую-либо величину  $e$  в качестве единицы измерения. Тогда для любой величины  $a \in G$  найдется единственное вещественное число  $\alpha > 0$ , такое, что выполнено равенство (3.33).

*Доказательство.* Существование числа  $\alpha$  фактически нами уже доказано. Единственность  $\alpha$  легко доказывается от противного с помощью теоремы 3.1, б). ■

**Замечание 1.** Число  $\alpha$  в (3.33) называется *мерой* величины  $a$  при единице измерения  $e$ .

Равенство (3.33) записывают также в виде

$$m_e(a) = \alpha \quad (3.33')$$

(где символ  $m_e$  обозначает вышеупомянутую меру). Найти число  $\alpha$  в (3.33) и значит *измерить* величину  $a$  с помощью величины  $e$ .

Заметим, однако, что в рамках теории Колмогорова — Александра устанавливается только принципиальная возможность измерения, а сама процедура измерения, вообще говоря, не может быть описана. Дело в том, что на практике мы измеряем не непосредственно величину с помощью величины, а величину объекта с помощью другого объекта (или объектов). При этом мы опираемся на соответствующие физические или иные законы, которым подчиняются рассматриваемые объекты. Однако в аксиомах Колмогорова — Александра явно присутствуют только сами величины, а характеризующие ими объекты даже не упоминаются.

**Замечание 2.** Иногда вместо «мера величины  $a$  при единице измерения  $e$ » мы будем говорить «численное значение величины  $a$  при единице измерения  $e$ » (см. по этому поводу также § 1).

**Замечание 3.** Если в (3.33)  $\alpha$  — натуральное число или положительная рациональная дробь, то величины  $a$  и  $e$  называются *соизмеримыми*; если же  $\alpha$  иррационально, то величины  $a$  и  $e$  называются *несоизмеримыми* (например, длина диагонали квадрата несоизмерима с длиной его стороны. Три различных доказательства этого факта можно найти в [2] и [9]).

**Замечание 4.** Теорема 3.2 позволяет для любых двух величин  $a, b \in G$  однозначно определить их отношение:

$$\frac{a}{b} = \gamma \Leftrightarrow a = \gamma b$$

(здесь  $\gamma$  — положительное вещественное число). При этом, какова бы ни была единица измерения  $e \in G$ , отношение величин  $a$  и  $b$  равно отношению их мер:

$$\frac{a}{b} = \frac{m_e(a)}{m_e(b)} \quad (3.34)$$

**Замечание 5.** Пусть  $a, b, e \in G$  и пусть  $a = \alpha e$ ,  $b = \beta e$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — положительные вещественные числа. Тогда в силу теоремы 3.1, очевидно, имеем

$$a + b = (\alpha + \beta)e,$$

и, значит,

$$m_e(a + b) = m_e(a) + m_e(b). \quad (3.35)$$

Соотношение (3.35) называется *аддитивностью меры* на множестве  $G$ .

**Замечание 6.** Пусть  $e, e_1 \in G$  и пусть  $e = \beta e_1$ , где  $\beta$  — положительное вещественное число. Тогда с учетом теорем 3.1 и 3.2 имеем для любого  $a \in G$ :

$$a = \alpha e = \alpha \beta e_1 = (\alpha \beta) e_1,$$

откуда

$$m_{e_1}(a) = m_e(a) m_{e_1}(e). \quad (3.36)$$

Это соотношение называется *мультипликативностью меры* на множестве  $G$ .

Приведем теперь еще один важный результат теории величин, позволяющий сравнение величин заменить сравнением их мер, т. е. положительных вещественных чисел.

**Теорема 3.3.** Пусть  $a, b, e \in G$ . Тогда

$$a) \ a < b \Leftrightarrow m_e(a) < m_e(b); \quad (3.37)$$

$$б) \ a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b); \quad (3.38)$$

$$в) \ a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b). \quad (3.39)$$

*Доказательство.* а) Необходимость. Пусть  $a < b$ ; обозначим

$$m_e(a) = \alpha, \quad m_e(b) = \beta.$$

Очевидно, имеем тогда

$$\alpha e < \beta e.$$

Будем теперь рассуждать от противного, а именно, предположим, что правое неравенство в (3.37) неверно. Это означает, что

$$\alpha = \beta \text{ или } \alpha > \beta.$$

Случай  $\alpha = \beta$ , очевидно, невозможен. Если же допустить, что  $\alpha > \beta$ , то получим

$$\alpha = \beta + \gamma, \quad \gamma > 0,$$

откуда следует, что

$$\alpha e = \beta e + \gamma e > \beta e,$$

т. е.

$$a > b,$$

и мы приходим к противоречию.

Достаточность доказывается аналогично.

б) Это утверждение следует из теоремы 3.2 и утверждения 3.5.

в) Это утверждение сводится к утверждению а). ■

В заключение этого параграфа отметим, что предложенная Колмогоровым и Александровым теория величин предполагает систему вещественных чисел уже построенной на основе соответствующей системы аксиом (см., например, [4, с. 331]). Однако если обратиться к истории математики, то мы увидим, что как рациональные дроби, так и иррациональные числа своим возникновением обязаны именно измерению интуитивно понимаемых аддитивных величин — длины, площади, объема, массы (см. по этому поводу [2]).

Этим, а также некоторым другим величинам и посвящены следующие параграфы нашей книги.



#### § 4. ДЛИНА: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ

---

Понятие длины является намного более глубоким, чем это кажется на первый взгляд. В этом параграфе мы попытаемся ответить на вопрос, что такое длина с математической точки зрения.

Прежде всего заметим, что в настоящее время в геометрии существует несколько логически безупречных аксиоматических систем, описывающих абстрактное трехмерное евклидово пространство  $E_3$ . Первая в ряду таких аксиоматических систем принадлежит великому немецкому математику Давиду Гильберту. Эта система была предложена в самом конце XIX века и основана на абстрактном, явно не определяемом понятии конгруэнтности геометрических фигур.

Другая система аксиом (эквивалентная системе Гильберта) восходит к известному немецкому математику Феликсу Клейну. Аксиоматический подход Клейна, разработанный им в начале XX века, основан на понятии движения, которое определяется как отображение пространства  $E_3$  на себя, обладающее рядом постулируемых свойств. Несмотря на то что аксиоматики Гильберта и Клейна математически эквивалентны друг другу, подход Клейна является, пожалуй, более глубоким и лучше отражает интуитивное представление человека об устройстве окружающего пространства.

Подход Клейна является в настоящее время общепринятым, так как он оказался к тому же превосходно приспособлен для нужд физики; в переработанном виде этот подход реализован в учебнике [10]. Ниже мы дадим определение длины в пространстве  $E_3$ , имея в виду, что оно описывается именно системой аксиом из [10].

Мы не приводим здесь весь список соответствующих аксиом, характеризующих пространство  $E_3$ , поскольку это заняло бы слишком много места, а нашей целью не является последовательное изложение основ евклидовой геометрии.

Подчеркнем, что такие понятия, как *точка*, *прямая*, *плоскость*, и такое свойство, как «*лежать между*», являются в аксиоматике Клейна (как, впрочем, и в аксиоматике Гильберта) базовыми, явным образом не определяются и не обязаны совпадать с при-

вычными нам мысленными зрительными образами. Вышеупомянутые понятия определяются не непосредственно, а через их взаимосвязи с помощью соответствующих групп аксиом. Например:

«через две различные точки можно провести единственную прямую»;

«существуют три точки, не лежащие на одной прямой»

и т. д.

Что касается таких понятий, как интервал, отрезок, луч, угол, полуплоскость, то они явным образом определяются через базовые понятия.

Например, интервал — это часть прямой, состоящая из всех точек, лежащих между какими-либо двумя различными точками  $A$  и  $B$  этой прямой. Точки  $A$  и  $B$  называются *концевыми точками* рассматриваемого интервала.

*Отрезок* — это интервал, к которому добавлены его концевые точки.

Что касается движения, то мы не будем давать его строгого определения (с помощью соответствующих аксиом из [10]), а ограничимся кратким описанием наиболее важных свойств, характеризующих это понятие.

*Движение* взаимно-однозначно отображает точки в точки, прямые в прямые и плоскости в плоскости. Кроме того, при движении отрезки переходят в отрезки, причем концевые точки отрезков переходят в концевые точки их образов. Последовательное осуществление двух движений есть движение; преобразование, обратное к движению, есть движение; тождественное преобразование есть движение. Если  $A$  и  $B$  — две произвольные точки,  $AA'$  и  $BB'$  — произвольные лучи, исходящие из этих точек,  $\pi_{AA'}$  и  $\pi_{BB'}$  — произвольные полуплоскости, ограниченные прямыми, являющимися продолжениями лучей  $AA'$  и  $BB'$ , то существует единственное движение, переводящее точку  $A$  в точку  $B$ , луч  $AA'$  в луч  $BB'$  и полуплоскость  $\pi_{AA'}$  в полуплоскость  $\pi_{BB'}$ .

*Замечание.* Иногда определяют движение как такое преобразование евклидова пространства, которое сохраняет расстояния между точками. Сейчас мы не можем встать на эту точку зрения, так как расстояние (длина) — это как раз то, что мы хотим определить.

Нам потребуется следующее важное определение. Пусть  $\Phi$  и  $\Psi$  — две геометрические фигуры (т. е. два множества точек) в  $E_3$ . Скажем, что фигура  $\Phi$  *конгруэнтна* фигуре  $\Psi$ , если существует

такое движение  $D$ , что  $D(\Phi) = \Psi$ . Конгруэнтность геометрических фигур  $\Phi$  и  $\Psi$  мы будем обозначать также следующим образом:

$$\Phi \sim \Psi.$$

**З а м е ч а н и е.** Мы обращаем внимание читателя на то, что в рамках излагаемого нами Клейновского подхода (в отличие от подхода Гильберта) конгруэнтность фигур *не является* базовым понятием теории.

Теперь мы можем, наконец, определить понятие длины в абстрактном трехмерном евклидовом пространстве  $E_3$ .

Пусть  $AB$  — отрезок, расположенный в пространстве  $E_3$ . Назовем *длиной* отрезка  $AB$  класс конгруэнтных ему отрезков; см. [7, 8]. (Этот класс мы будем обозначать через  $|AB|$ .) Таким образом, если  $AB$  и  $CD$  — два отрезка из  $E_3$ , то равенство их длин

$$|AB| = |CD|$$

означает не что иное, как совпадение соответствующих классов.

Рассмотрим теперь произвольный отрезок  $AC$  из пространства  $E_3$ , и пусть  $B$  — какая-нибудь точка, лежащая между точками  $A$  и  $C$ . Тогда мы будем говорить, что точка  $B$  *разбивает* отрезок  $AC$  на отрезки  $AB$  и  $BC$  (или, иначе, что отрезок  $AC$  *состоит* из отрезков  $AB$  и  $BC$ ).

Этот факт мы будем записывать в виде

$$AC = AB \oplus BC. \quad (4.1)$$

Определим теперь сумму соответствующих классов отрезков (т. е. длин), положив

$$|AC| = |AB| + |BC|. \quad (4.2)$$

Опираясь на систему аксиом, характеризующих движение, можно показать, что это определение корректно, т. е. что, если в пространстве  $E_3$  имеется отрезок  $A'C'$ , представимый в виде

$$A'C' = A'B' \oplus B'C',$$

где

$$|A'B'| = |AB|, \quad |B'C'| = |BC|,$$

то обязательно

$$|A'C'| = |AC|.$$

Теперь можно на множестве длин отрезков из  $E_3$  ввести отношение «меньше», положив

$$|AB| < |AC| \Leftrightarrow |AC| = |AB| + |BC|. \quad (4.3)$$

Далее, с помощью полной системы аксиом, характеризующих евклидово пространство  $E_3$  (см. [10]), можно строго доказать, что введенная нами длина отрезка удовлетворяет аксиомам K1–K7, т. е. являются положительной скалярно-аддитивной величиной в смысле Колмогорова — Александрова.

Итак, понятие длины в абстрактном евклидовом пространстве  $E_3$  введено и обладает всеми требуемыми свойствами. Однако длина нужна нам для того, чтобы измерять предметы не в абстрактном пространстве  $E_3$ , а в том физическом пространстве, в котором мы живем. И перед нами возникает довольно неожиданная задача: как приспособить введенное выше чисто математическое понятие к нашим повседневным нуждам?

## § 5. ДЛИНА: ПОПЫТКА СОЕДИНИТЬ ТЕОРИЮ С ПРАКТИКОЙ

---

Прежде чем пытаться определить, что такое длина в окружающем мире, нам следует обсудить, что означают слова: *точка*, *прямая*, *плоскость* применительно к физическому пространству  $E_{\text{физ}}$ , в котором мы живем.

Выше мы уже говорили о том, что общепринятые сейчас в математике системы аксиом, задающие трехмерное евклидово пространство, не привязаны специально к нашему физическому пространству, а *точки*, *прямые* и *плоскости*, удовлетворяющие этим аксиомам, не обязаны походить на те зрительные образы, которые мы себе мысленно представляем.

Более того, логически безупречного — явного или неявного — определения этих важнейших понятий применительно к нашему физическому пространству до сих пор не существует! В [11, с. 205] по этому поводу прямо сказано: «*точки, прямые и плоскости как образы нашего геометрического воображения не поддаются математическому описанию*».

Нам могут возразить:

— А чем вам не нравится, например, такое определение: «Прямая — это бесконечно тонкая натянутая нить, простирающаяся неограниченно далеко в обоих направлениях».

Это определение — прекрасное подспорье для нашего геометрического воображения. Однако с точки зрения логики оно не выдерживает критики. В нем используются термины «тонкий» и «далеко», а ведь мы еще только собираемся ввести понятие длины. Кроме того, не совсем понятно, что такое нить. Металлическая спираль — это нить или нет?

Иногда говорят так:

— Будем определять не прямую, а луч. Почему нельзя дать такое определение: «Луч — это луч света»?

Однако и здесь нас поджидает разочарование. Луч света — как утверждают физики — это поток фотонов, сложным образом взаимодействующих друг с другом, а вовсе не тот геометрический объект, который нам нужен. (Если же рассматривать одиночный фотон, то он и вовсе не имеет траектории в привычном смысле

этого слова.) Снова, как и в случае с нитью, мы получаем всего лишь подспорье для нашего геометрического воображения.

Обсуждая этот круг вопросов, невозможно пройти мимо определения точки, которое дал Евклид в своих «Началах» примерно за 300 лет до нашей эры:

«Точка — это то, что не имеет частей». (5.1)

Евклид, впервые предложивший, пусть не вполне совершенную, систему геометрических аксиом, безусловно, хотел описать своей теорией именно наше физическое пространство. Долгое время математики не видели в «Началах» Евклида никаких изъянов, и лишь во второй половине XIX века выяснилось, что система аксиом Евклида не вполне удовлетворяет требованиям математической строгости. Как мы уже отмечали в § 4, логически безупречную систему геометрических аксиом впервые предложил Гильберт. Однако геометрия, приняв систему аксиом Гильберта (или Клейна, или любую другую эквивалентную систему аксиом, описывающих трехмерное евклидово пространство  $E_3$ ), платит за свою логическую безупречность непомерно высокую цену: перестает быть привязанной к физическому пространству, ради которого создавалась.

Между прочим, не лишенная гениальности аксиома (5.1) отвергается современной математикой как утверждение, не удовлетворяющее требованиям логической строгости и ясности.

Попробуем объяснить, почему аксиома (5.1) не вписывается в современную математику, базирующуюся на теории множеств. Для этого переформулируем ее следующим образом:

«Точка — это такой геометрический объект, который не может быть представлен в виде объединения двух непересекающихся геометрических объектов». (5.1')

Однако, употребив слова «объединение» и «пересечение», мы должны «геометрический объект» понимать как множество ... точек. А ведь точка — это как раз то, что мы хотим определить.

Итак, мы хорошо представляем себе, что такое точка, прямая и плоскость в окружающем нас физическом пространстве, но определить эти понятия с должной математической строгостью почему-то не можем. Возможно ли это вообще сделать в принципе? Ответ на этот вопрос авторам неизвестен.

Перейдем теперь к определению понятия длины в окружающем нас физическом пространстве. Желая опереться на уже введенное в § 4 определение длины в абстрактном евклидовом про-



пространстве  $E_3$ , мы поступим следующим, казалось бы, наиболее естественным, образом. Будем считать, что точки, прямые, плоскости, отрезки и т. п. — это хорошо знакомые нам, общие для всех людей мысленные зрительные образы. Кроме того, будем предполагать, что все эти объекты подчиняются полной системе аксиом из [10], описывающей абстрактное пространство  $E_3$  в рамках подхода Клейна.

Теперь у нас есть прекрасная возможность скопировать определение длины, предложенное в предыдущем параграфе для абстрактного пространства  $E_3$ . А именно, скажем, что *длина отрезка  $AB$  из физического пространства  $E_{\text{физ}}$  — это класс отрезков, конгруэнтных отрезку  $AB$* . (Конгруэнтность геометрических фигур мы определяем в точности так же, как в § 4.) Затем, как и в § 4, можно определить сумму длин и отношение «меньше» на множестве длин отрезков из  $E_{\text{физ}}$ .

Попробуем теперь, опираясь на эти определения, сравнить длины двух отрезков, нарисованных мелом на двух классных досках, расположенных в разных комнатах. Фактически нам нужно узнать, какая из трех ситуаций реализуется:

- а) существует движение, переводящее первый отрезок во второй;
- б) существует движение, переводящее первый отрезок в часть второго;
- в) существует движение, переводящее второй отрезок в часть первого.

При этом в рамках нашего подхода мы не имеем права пользоваться никакими измерительными приборами; по сути, единственный наш математический инструмент — это определение движения, даваемое соответствующим списком аксиом. В § 4 мы бегло очертили важнейшие требования, которым должно удовлетворять движение, и уже из одних этих требований ясно, что практически сравнивать длины отрезков, опираясь на определение движения, невозможно. Действительно, чтобы пользоваться этим определением, нужно мысленно следить за всеми мысленно проведенными прямыми и плоскостями, проверяя каким-то образом, все ли требования, характеризующие движение, выполнены.

Итак, мы честно попытались приспособить изложенную в § 4 теорию к практике и потерпели неудачу. Мы все еще не знаем, что такое длина в окружающем нас физическом пространстве.

## § 6. ТВЕРДЫЕ ТЕЛА И ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИН ОТРЕЗКОВ

Положение спасает следующий экспериментальный факт фундаментальной важности. В природе существуют так называемые *твердые тела*, которые, *перемещаясь, ведут себя так, что в занимаемом ими объеме реализуются все требования, характеризующие движение трехмерного евклидова пространства.*

Каждое твердое тело можно представить себе замороженным в «кусок льда», занимающий все физическое пространство, так что каждому перемещению такого тела будет однозначно соответствовать движение всего физического пространства.

Такие твердые тела, очевидно, можно использовать как измерительные приборы. Ими мы фактически и пользуемся: это линейки, циркули и т. п.

Итак, приложив линейку к отрезку  $AB$ , нарисованному мелом на доске, а затем перемещая эту линейку в другую комнату и прикладывая ее к отрезку  $CD$ , нарисованному мелом на другой доске, мы фактически задаем движение всего физического пространства. Именно поэтому обычное измерение длины отрезка с помощью линейки согласуется с математическим определением длины, основанном на понятии движения.

Нетрудно догадаться, однако, что само понятие движения возникло из наблюдений за твердыми телами (а также за их отражениями в зеркале). Пожалуй, именно наличие в природе твердых тел позволило геометрии стать развитой наукой; если бы твердых тел не существовало, геометры, скорее всего, не догадались бы о евклидовости нашего пространства!

Прежде чем окончательно распрощаться с темой длины в физическом пространстве, сделаем еще несколько замечаний.

**З а м е ч а н и е 1.** Опыт показывает, что твердые тела, уже охарактеризованные нами выше, — это в точности то обширное семейство тел различной природы, которое обладает следующим свойством: *если одно (любое) из этих тел использовать в качестве измерительного прибора, а остальные тела как угодно перемещать в пространстве, то относительные размеры этих тел остаются неизменными.*

Учитывая эту, не опирающуюся на понятие движения, характеристику твердых тел, можно было бы определить длину отрезка непосредственно, сказав, что «длина отрезка — это класс всех отрезков, которые можно совместить с данным, перемещая их как твердые тела». (При этом ни о каких аксиомах, определяющих движение, можно было бы не вспоминать.) Мы, однако, предпочли отправиться от определения длины, принятого в настоящее время в математике, и показать его связь с теми измерениями, которые мы производим на практике. Но была еще одна причина, которая заставила нас действовать таким образом: с помощью подхода Клейна, основанного на понятии движения, нам удалось в § 5 ввести в  $\mathcal{E}_{\text{физ}}$  понятие длины, не опираясь на существование твердых тел. (Между прочим, основываясь на аксиоматике Гильберта, ввести длину в  $\mathcal{E}_{\text{физ}}$ , не опираясь на существование твердых тел, невозможно.)

**З а м е ч а н и е 2.** После того как понятие длины отрезка определено, можно определить длину ломаной как сумму длин ее звеньев, а затем и длину произвольной кусочно-гладкой кривой — как предел длин вписанных в нее ломаных при неограниченном уменьшении длин звеньев. (Напомним, что *гладкой* называют кривую, к которой можно провести касательную в каждой ее точке. *Кусочно-гладкая* кривая состоит из конечного числа кусков гладких кривых.) Нетрудно показать, что определенная таким образом длина по-прежнему остается величиной, удовлетворяющей аксиомам Колмогорова — Александрова. Процедура перехода к пределу при вычислении длин кривых аккуратно проводится в курсе математического анализа, где, в частности, строго обосновывается известная из школы формула, выражающая длину окружности через длину ее радиуса:

$$S = 2\pi r, \quad \pi = 3,14\dots$$

В заключение этого параграфа приведем краткие исторические сведения о важнейшей общепринятой теперь единице длины — метре. Процитируем по этому поводу [12]: «Еще в XVII столетии ставился вопрос о создании единых единиц измерения, но решающий шаг к введению новой (метрической) системы был сделан лишь после Французской революции. Национальное собрание Франции приняло решение о необходимости ликвидации «странного и обременительного многообразия мер» и поручило 8 мая 1790 года Французской академии наук разработать применимую во всем мире единую систему мер и весов». В результате

в качестве новой универсальной единицы длины был принят метр, равный одной сорокамиллионной доле Парижского меридиана, а в 1791 году из платины был сделан соответствующий эталон. Спустя еще восемь лет метрическая система мер и весов была введена во Франции официально.

В дальнейшем, учитывая возрастающие требования к точности измерений, эталон метра неоднократно заменяли. В настоящее время необходимость в такого рода эталонах фактически отпала, поскольку стандарт длины удается жестко связать с длиной волны монохроматического светового источника (см. [12]).

## § 7. ВРЕМЯ

Время — наиболее загадочная из величин; на время нельзя указать пальцем, его невозможно увидеть, услышать или пощупать. Откуда же мы взяли, что время существует?

Чтобы не слишком углубляться в философию, мы будем считать общеизвестными и не требующими объяснений такие понятия, как *мгновение*, *раньше*, *позже*.

Тогда у нас появляется возможность считать, что время — это совокупность мгновений.

В дальнейшем, говоря о *событиях*, мы будем мыслить их как мгновенные, так что события для нас — это всего лишь метки, расставленные во времени.

Нам понадобятся следующие обозначения.

Если события  $A$  и  $B$  происходят в одно и то же мгновение (т. е. *одновременно*), то мы будем писать

$$A \sim B.$$

Если же событие  $A$  происходит раньше, чем событие  $B$  (т. е.  $B$  происходит позже, чем  $A$ ), то мы будем обозначать это так:

$$A < B \text{ (или, что то же самое, } B > A).$$

Из опыта мы знаем, что

1) для любых двух (мгновенных) событий  $A$  и  $B$  верно одно и только одно из трех соотношений:

$$A < B, A \sim B \text{ или } B > A;$$

2) если события  $A$ ,  $B$  и  $C$  таковы, что

$$A < B, B < C,$$

то

$$A < C.$$

Из 1) и 2) нетрудно, опираясь исключительно на логику, вывести, что время не может «разветвляться» или «идти по кругу». Впрочем, эти свойства времени и так хорошо известны из опыта.

Но, может быть, сказанным характерные свойства времени и исчерпываются? Сейчас мы увидим, что это не так — важнейшие (и не очевидные!) свойства времени, связанные с его измерением, нам еще предстоит обнаружить.

С этой целью мы рассмотрим несколько мысленных опытов; для простоты мы вначале считаем, что все они происходят на поверхности не испытывающего никаких внешних воздействий и не вращающегося относительно удаленных звезд астероида.

**Опыт № 1.** Возьмем тяжелый диск и на одной из окружностей, ограничивающих его боковую поверхность, отметим точки  $P_0, \dots, P_9$ , делящие эту окружность на десять равных (конгруэнтных) дуг. Затем с помощью новых точек деления разобьем каждую из образовавшихся дуг на десять равных частей и т. д. Теперь закрутим наш диск вокруг вертикальной (т. е. направленной к центру астероида) оси; при этом мы считаем, что трение отсутствует. Начнем следить за точками, когда они проходят мимо стрелки, которую мы закрепили на подставке (см. рис. 1).

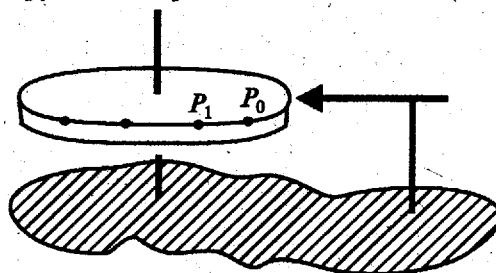


Рис. 1

Мы видим, что каждому моменту времени, наступающему после того, как мы закрутили диск, может быть взаимно-однозначным образом сопоставлено вещественное неотрицательное число

$$\tau = n_0, n_1 n_2 \dots, \quad (7.1)$$

где  $n_0$  — число полных оборотов диска, совершенных к моменту наблюдения,  $n_1$  — число десятых долей оборота, которые успел совершить диск после того, как сделал  $n_0$  полных оборотов,  $n_2$  — число сотых долей оборота, которые успел совершить диск, после того, как сделал  $n_0$  полных оборотов, и вдобавок  $n_1$  десятых долей оборота, и т. д. Ясно, что здесь все  $n_i$  — целые неотрицательные числа, причем  $n_1, n_2, \dots$  не превосходят девяти. Очевидно также, что моменту времени, когда мы закрутили диск, соответствует число  $\tau = 0$ .

Представим себе теперь, что диск *вращался всегда*; в этом случае отсчитывать обороты диска мы могли начать в произвольный фиксированный момент времени, которому сопоставим число  $\tau = 0$ . Всем последующим моментам будем сопоставлять положи-



тельные вещественные числа в соответствии с правилом (7.1). Однако теперь мы можем сопоставить моментам, предшествующим отсчетному (нулевому), отрицательные вещественные числа по формуле, аналогичной (7.1):

$$\tau = -n_0, n_1 n_2 \dots \quad (7.1')$$

Здесь  $n_1$  — количество полных оборотов, которые успеет совершить диск от текущего момента до нулевого момента,  $n_1$  — количество десятых долей оборота, которые успеет совершить диск после того, как совершит упомянутые  $n_0$  оборотов, и т. д.

Очевидно, что соотношения (7.1), (7.1') задают взаимно-однозначное отображение совокупности всех моментов времени на числовую ось; с помощью этого отображения мы каждому (мгновенному) событию  $A$  можем сопоставить число — его *временную координату*  $\tau(A)$ . Числовую ось, на которой отложены временные координаты событий, принято называть *осью времени*.

Если  $A$  и  $B$  — события, то очевидно, что

$$A < B \Leftrightarrow \tau(A) < \tau(B);$$

$$A \sim B \Leftrightarrow \tau(A) = \tau(B);$$

$$A > B \Leftrightarrow \tau(A) > \tau(B).$$

**З а м е ч а н и е.** Предположение о том, что наш диск мог вращаться всегда, конечно же, нефизично. (Известно, что возраст Вселенной не превышает 15–20 миллиардов лет.) Нам, однако, важно разобратся со временем на гораздо меньших масштабах, и мы, идеализируя ситуацию, считаем Вселенную существующей вечно.

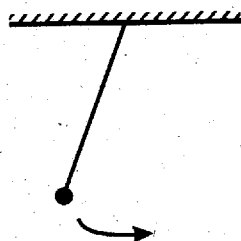


Рис 2

Предоставив диску возможность вращаться, сделаем еще один опыт (по-прежнему на поверхности нашего астероида).

**Опыт № 2.** Подвесим груз на тонком твердом стержне, немного отклоним образовавшийся маятник от положения равновесия, а затем отпустим. Маятник, очевидно, начнет колебаться, время от времени проходя через положение равновесия (см. рис. 2). (Идеализируя ситуацию, считаем, что трение в системе отсутствует.)

Начнем теперь следить одновременно за диском и за маятником. Мы обнаружим, что *каждому* качанию маятника всегда соответствует *одно и то же* положительное (не обязательно целое) вещественное число  $\alpha$  оборотов диска (которые диск успе-

вает совершить за время этого качания). Однако оба наших опыта проводятся полностью независимо друг от друга; более того, они основаны на совершенно различных физических принципах, и то, что их результаты оказались столь жестким образом согласованы, удивительно.

Однако двух проделанных опытов явно недостаточно, чтобы решиться сформулировать какую-либо обобщающую идею. Поэтому рассмотрим

**Опыт № 3.** Приведем в действие хорошо известное устройство, называемое *песочными часами*, перевернув их так, чтобы чаша с песком оказалась наверху (см. рис. 3).

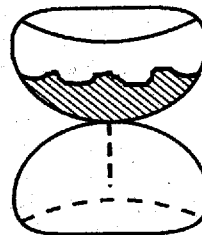


Рис. 3

Этот опыт разительно непохож на два предыдущих. Действительно, в песочных часах неизбежно присутствует трение между песчинками, и движение песчинок в какой-то момент полностью прекращается. Очевидно также, что опыт с песочными часами совершенно независим от двух предыдущих опытов: песчинки, пересыпаясь, «не знают», что происходит с диском и маятником. Однако мы снова сталкиваемся с загадочным числовым эффектом — каждому законченному процессу пересыпания песчинок из верхней чаши в нижнюю соответствует (на этот раз приблизительно, но с неплохой точностью) одно и то же вещественное число  $\beta > 0$  оборотов нашего диска.

Запомнив приближенный результат этого опыта, перейдем к следующему.

**Опыт № 4.** Рассмотрим маятник с трением, а именно маятник, погруженный в вязкую жидкость (см. рис. 4). Отклоним маятник от положения равновесия на фиксированное расстояние и отпустим; он начнет совершать затухающие колебания и, в конце концов, остановится. (В случае сильновязкой жидкости затухающих колебаний может и не быть, а маятник сразу остановится, достигнув положения равновесия.) На этот раз с превосходной точностью получаем уже ожидаемый результат: каждому процессу от начала движения маятника в вязкой жидкости до его полной остановки соответствует одно и то же вещественное число  $\gamma > 0$  оборотов нашего диска.

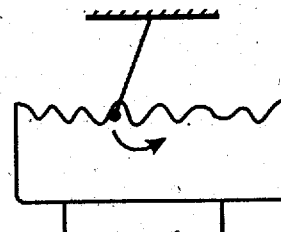


Рис. 4

Теперь мы уже знаем, чего следует ожидать от подобных опытов. И все же рассмотрим еще один.

**Опыт № 5.** Возьмем пружинный маятник, состоящий из двух одинаковых тяжелых шаров, соединенных горизонтально расположенной идеальной (т. е. сжимающейся и распрямляющейся без трения) пружиной; см. рис. 5. Отведем шары от положения равновесия на некоторое расстояние, а затем отпустим. Пружинный маятник начнет совершать незатухающие колебания, причем — как мы уже ожидаем — каждому его колебанию будет соответствовать одно и то же вещественное число  $\delta > 0$  оборотов нашего диска.

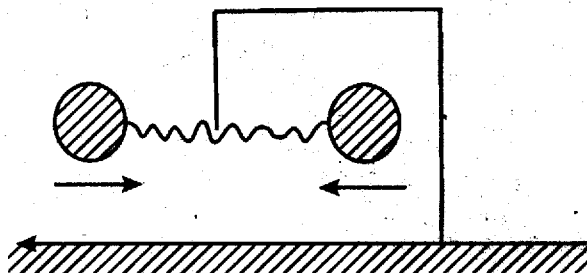


Рис. 5

Серию опытов можно было бы продолжить, рассмотрев, например, пружинный маятник, погруженный в вязкую жидкость, и т. п. При этом обнаруженная нами закономерность — неизменность числа оборотов диска за полный цикл каждого из рассматриваемых процессов — по-прежнему имела бы место. Несколько особняком стоит результат опыта с песочными часами, где обнаруженное числовое соответствие было не точным, а приближенным. Следует учесть, однако, что при каждом новом переворачивании песчинки в песочных часах укладываются не так, как прежде. Поэтому мы, опрокидывая песочные часы, получаем каждый раз, по сути, новый прибор, в котором протекает иной, чем прежде, физический процесс.

С учетом сказанного все вышеперечисленные опыты подводят нас к важному выводу о свойствах времени, который мы сейчас попытаемся сформулировать.

Пусть  $AB$  — произвольный отрезок времени, ограниченный (мгновенными) событиями  $A$  и  $B$ ,  $A < B$ . Тогда отрезку  $AB$ , очевидно, можно сопоставить положительное вещественное число

$$\tau(AB) = \tau(B) - \tau(A), \quad (7.2)$$

представляющее собой число оборотов нашего диска с момента  $A$  до момента  $B$ .

Скажем, что два отрезка времени  $AB$  и  $CD$  имеют одинаковую длительность, если

$$\tau(AB) = \tau(CD). \quad (7.3)$$

Опыты, проведенные нами, показывают, что отрезки времени, имеющие одинаковую длительность в смысле (7.3), вмещают в себя одно и то же «количество физических явлений».

Определим теперь саму *длительность* отрезка времени  $AB$  как совокупность всех временных отрезков  $CD$ , удовлетворяющих условию (7.3); обозначать эту длительность мы будем через  $|AB|$ .

Далее, пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  и три (мгновенных) события, таких, что

$$A < B < C. \quad (7.4)$$

По аналогии с пространственным случаем скажем, что временной отрезок  $AC$  состоит из отрезков  $AB$  и  $BC$ , и будем записывать это в виде

$$AC = AB \oplus BC. \quad (7.5)$$

Теперь мы можем определить операцию сложения на множестве всех длительностей, положив для любых (мгновенных) событий  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , удовлетворяющих (7.4),

$$|AC| = |AB| + |BC|. \quad (7.6)$$

То, что длительности временных отрезков удовлетворяют аксиомам Колмогорова — Александрова, очевидно из введенных выше определений.

**З а м е ч а н и е.** Вместо «длительность отрезка времени» мы будем в дальнейшем говорить просто «*время*». В этой упрощенной терминологии (7.6) будет читаться следующим образом:

«Время от  $A$  до  $C$  равно сумме времен от  $A$  до  $B$  и от  $B$  до  $C$ ».

Следуя Герману Вейлю [13], мы будем называть *идеальными часами* любые физические системы, обладающие следующими двумя свойствами:

- а) система является изолированной, т. е. не испытывает влияния со стороны окружающего мира;
- б) в какой-то момент времени система возвращается в то состояние, в котором она уже находилась в некоторый предшествующий момент времени.

Нетрудно видеть, что идеальными часами в смысле Вейля являются системы, рассмотренные в опытах №№ 1, 2 и 5. В пер-

вом и пятом опытах такими системами можно считать соответственно сам диск и два шара, соединенные пружиной; во втором опыте такой системой следует считать маятник и астероид.

Что касается песочных часов и маятника, погруженного в вязкую жидкость, то они требованию б), очевидно, не удовлетворяют. Однако взамен соответствующие системы (включающие в себя астероид) удовлетворяют важному условию:

б') процесс, протекающий в системе, имеет ярко выраженное начало и окончание.

Как показывает общечеловеческий опыт, условий а) и б') достаточно для того, чтобы удовлетворяющую им физическую систему можно было использовать в качестве устройства, отмеряющего фиксированный отрезок времени. Такие системы (равно как и системы, лишь приближенно удовлетворяющие условиям Вейля) мы будем называть *часами*, не употребляя уже эпитета «идеальный».

Перемещая часы всевозможных родов в разнообразных направлениях и сопоставляя затем их показания, мы приходим к еще одному важному выводу: *время течет в пустом пространстве всюду одинаково*.

Между прочим, хорошими (хотя и не идеальными) часами являются следующие природные объекты:

- а) вращающаяся вокруг своей оси Земля;
- б) система Земля — Солнце;
- в) система Земля — Луна.

По-видимому, существование именно этих природных часов заставило людей впервые задуматься о том, что такое время и как его следует измерять. Кроме того, поскольку степень равномерности вращения Земли вокруг своей оси обеспечивает в каждой точке земной поверхности практически постоянную добавку к силе тяжести, люди смогли использовать в качестве измерителей времени (привязанных к заданной местности) маятники, песочные часы, водяные часы и т. п. Тем самым результаты астрономических наблюдений и наблюдений за процессами, происходящими в непосредственной близости от человека, удалось связать с помощью единого понятия — времени.

Теперь, чтобы научиться однозначно описывать ход времени и тем самым сопоставлять всевозможным событиям их временные координаты, осталось договориться о выборе единиц измерения времени и о том, какое событие принять за начало отсчета.

Чтобы не усложнять изложение излишними техническими подробностями, мы приведем здесь определение основной единицы времени — секунды, — принятое до 1960 года. А именно, секунда — это  $\frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60}$  часть средних солнечных суток.

Кратными секунде единицами времени являются:

минута (1 мин = 60 сек);

час (1 ч = 60 мин);

сутки (1 сут. = 24 ч),

что касается года (точнее, так называемого среднего тропического года, т. е. промежутка времени между двумя последовательными прохождениями Солнца через точку весеннего равноденствия), то его продолжительность равна

365,24220 сут.

З а м е ч а н и е. Разбиение суток на 24 части (часы), общепринятое в настоящее время, было придумано еще древними египтянами, а древним вавилонянам с их шестидесятеричной системой счисления мы обязаны тем, что каждый час состоит из 60 минут, а каждая минута — из 60 секунд (подробнее об этом см., например, [1, с. 92]).

Наконец, отметим, что в большинстве стран отсчет времени сейчас ведется «от рождества Христова», или, что то же самое, «от начала нашей эры».

## § 8. ВЗАИМОСВЯЗЬ ЛЕТОИСЧИСЛЕНИЙ. ПОЧЕМУ ВРЕМЯ ИДЕТ ВПЕРЕД

---

Свойства времени, установленные нами выше, позволяют вывести формулу, связывающую временные координаты событий, регистрируемых одновременно двумя цивилизациями, у каждой из которых своя система летоисчисления. Назовем (условно) одну из таких цивилизаций «земной», а другую — «марсианской»; текущие временные координаты в используемых ими системах летоисчисления будем обозначать соответственно через  $\eta$  и  $\tau$ .

Покажем, что справедливо соотношение

$$\tau = a\eta + b, \quad (8.1)$$

где  $a$  и  $b$  — вещественные постоянные, причем  $a > 0$ .

Прежде всего очевидно, что  $\tau$  является однозначной монотонно возрастающей функцией от  $\eta$ . Далее, пусть  $A$  и  $B$  — события, имеющие «земные» временные координаты  $\eta_A$  и  $\eta_B$  соответственно. Пусть  $C$  — событие, произошедшее в точности посередине временного отрезка  $AB$ , так что

$$\begin{aligned} \eta_C - \eta_A &= \eta_B - \eta_C, \\ \tau_C - \tau_A &= \tau_B - \tau_C. \end{aligned} \quad (8.2)$$

(Как мы знаем, равенство длительностей временных отрезков не зависит от того, какие часы используются.) Из (8.2) имеем

$$\eta_C = \frac{\eta_A + \eta_B}{2}, \quad (8.3)$$

$$\tau_C = \frac{\tau_A + \tau_B}{2} = \frac{\tau(\eta_A) + \tau(\eta_B)}{2}. \quad (8.4)$$

(Поскольку  $\tau$  является однозначной функцией от  $\eta$ , мы имели право заменить в (8.4)  $\tau_A$  и  $\tau_B$  на  $\tau(\eta_A)$  и  $\tau(\eta_B)$  соответственно.) Однако из (8.3) следует, что

$$\tau_C \equiv \tau(\eta_C) = \tau\left(\frac{\eta_A + \eta_B}{2}\right);$$

подставляя найденное выражение для  $\tau_C$  в (8.4), приходим к функциональному уравнению:

$$\tau\left(\frac{\eta_A + \eta_B}{2}\right) = \frac{\tau(\eta_A) + \tau(\eta_B)}{2}. \quad (8.5)$$

Заметим, что если  $\tau(\eta)$  — какое-то решение уравнения (8.5), то  $\tau(\eta) + \text{const}$  — также решение этого уравнения. Поэтому достаточно решить уравнение (8.5) при дополнительном ограничении

$$\tau(0) = 0. \quad (8.6)$$

Полагая теперь в (8.5)  $\eta_B = 0$ , учитывая (8.6) и переобозначая  $\eta_A$  через  $\eta$ , приходим к уравнению, имеющему намного более простой вид, чем (8.5):

$$\tau\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{\tau(\eta)}{2}. \quad (8.7)$$

Однако с помощью рис. 6, рассуждая от противного,

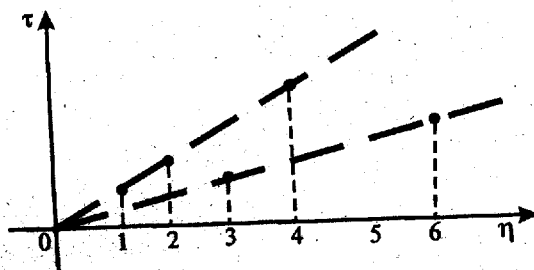


Рис. 6

нетрудно установить, что всякое монотонно возрастающее решение уравнения (8.7) обязано иметь вид

$$\tau(\eta) = a\eta, \quad a = \text{const} > 0. \quad (8.8)$$

Ясно, что верно и обратное: всякая функция вида (8.8) удовлетворяет уравнению (8.7). Но отсюда следует, что семейство всех монотонно возрастающих решений уравнения (8.5) дается формулой (8.1), что и требовалось установить.

Формула (8.1) содержит только два параметра ( $a$  и  $b$ ), поэтому достаточно знать (в обеих системах) временные координаты только двух событий, скажем,  $A$  и  $B$ , чтобы уметь переходить от одного летоисчисления к другому.

Действительно, имеем из (8.1):

$$\tau_A = a\eta_A + b,$$

$$\tau_B = a\eta_B + b,$$



откуда

$$a = \frac{\tau_A - \tau_B}{\eta_A - \eta_B}, \quad b = \tau_A - \frac{\tau_A - \tau_B}{\eta_A - \eta_B} \eta_A. \quad (8.9)$$

В заключение этого параграфа обсудим еще один важный вопрос, кажущийся на первый взгляд очевидным. Выше мы считали само собой разумеющимся, что в обеих системах — «земной» и «марсианской» — отсчет времени ведется в одном и том же направлении, от прошлого к будущему.

Именно поэтому постоянная  $a$  в (8.9) оказывается положительной. Но, может быть, мы поторопились с этим предположением: вдруг с «марсианской» точки зрения «земное» будущее давным-давно известно, тогда как «земное» прошлое туманно и непредсказуемо? Иными словами, не может ли быть так, что сознание «марсиан» фиксирует настоящее, перемещаясь во времени от будущего к прошлому? (Если бы это было так, то в (8.9) мы бы имели  $a < 0$ .)

По этому поводу можно сказать следующее. Всюду в окружающей нас природе мы сталкиваемся с так называемыми *необратимыми процессами*, однозначно указывающими на неравноправие двух направлений времени. Действительно, разбившаяся чашка сама не склеивается и обратно на стол не запрыгивает и т. д. Если бы нам показали документальный фильм с самосклеивающимися чашками, запрыгивающими на столы, мы бы сразу догадались, что в этом фильме начало и конец перепутаны. Знаменитый физик Стивен Хокинг с помощью интересных рассуждений доказал [20, с. 205–206], что для сознания живого существа направление «от известного прошлого» к «неизвестному будущему» обязательно совпадает с тем направлением времени, в котором «возрастает беспорядок», т. е. разбитая чашка сама не склеивается. Мы не будем повторять здесь рассуждения Хокинга, а вместо этого выскажем одно простое соображение. Если бы психологическое время «марсиан» текло в сторону от «земного» будущего к «земному» прошлому (и при этом «марсиане» имели возможность как-то наблюдать жизнь «землян»), то будущее «землян» оказалось бы полностью детерминировано, что, очевидно, противоречит наличию у «землян» свободы воли.

## § 9. МАССА

Масса — последняя из трех (после длины и времени) наиболее важных, *основных* величин механики.

Самый простой и часто принимаемый способ ввести понятие массы основан на известном законе рычага и заключается в следующем.

Рассматриваются (для определенности, на поверхности Земли) уравновешенные равноплечие весы и выбирается некоторый предмет  $A$ ; он кладется, например, на левую чашку весов. Затем рассматривается совокупность  $\mu_1$ , состоящая из всех предметов, уравновешивающих предмет  $A$ :

$$\mu_A = \{ A_i | A_i \text{ уравновешивает предмет } A; i = 1, 2, \dots \}.$$

Этот класс предметов и объявляется по определению массой предмета  $A$  (а также каждого из предметов  $A_i$ ).

Однако такой способ определения понятия массы содержит неустранимый логический дефект (на который обычно не обращают внимания). Действительно, поскольку один и тот же предмет невозможно одновременно поставить на обе чашки весов, предмет  $A$  не принадлежит совокупности  $\mu_A$ , а предмет  $A_1$  не принадлежит совокупности  $\mu_{A_1}$ . Таким образом,

$$\mu_A \neq \mu_{A_1},$$

что ни в коем случае не может нас удовлетворить.

Более того, поправить дело, определив массу предмета  $A$  как совокупность

$$\tilde{\mu}_A = \{ A_i | A_i \text{ уравновешивает предмет } A \\ \text{или совпадает с предметом } A \}$$

не удастся. Действительно, при таком определении никакая часть предмета  $A$ , к которой добавлен компенсирующий утраченную часть довесок, не входит в совокупность  $\tilde{\mu}_A$ , ибо никакая часть предмета  $A$  не может одновременно располагаться на двух чашках весов (см. рис. 7).

Определение массы тела с помощью закона рычага, конечно же, привлекательно своей наглядностью, однако, пытаясь усовер-

шенствовать его, мы неизменно будем сталкиваться с аналогичными досадными недоразумениями. (Любопытно, что, определяя длину и время, мы подобных логических затруднений не испытываем.)

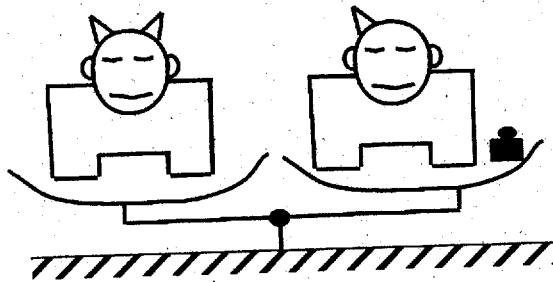


Рис. 7

Поэтому мы откажемся от определения массы с помощью закона рычага и будем действовать иначе.

Представим себе, что в нашем распоряжении имеются не чашечные весы, а пружинные, снабженные идеальной вертикально расположенной пружиной, растягивающейся при подвешивании груза. Сделаем на вертикальной шкале отметку, отвечающую растяжению пружины при подвешивании груза  $A$ , и определим на этот раз его массу  $m_A$  так:

$$m_A = \{ A_i | A_i \text{ растягивает пружину до той же отметки, что и груз } A \}. \quad (9.1)$$

Очевидно, что при таком определении не только сам предмет  $A$  входит в совокупность  $m_A$ , но и любая часть предмета  $A$ , дополненная грузом, уравнивающим недостающую часть, также входит в  $m_A$ .

Далее, нетрудно определить сумму масс аналогично тому, как мы определяли сумму длин в § 3, а именно, пусть  $C$  — произвольный предмет; разобьем его на непересекающиеся части  $A$  и  $B$ . Мы будем говорить в этом случае, что предмет  $C$  состоит из частей  $A$  и  $B$ , и записывать это в виде

$$C = A \oplus B.$$

Из наблюдений мы знаем, что всегда  $m_C = m_{A \oplus B}$ .

Теперь по определению положим

$$m_{A \oplus B} = m_A + m_B.$$

Как показывает опыт, то, что введенная нами величина — масса — удовлетворяет аксиомам Колмогорова — Александрова, можно считать справедливым лишь условно, в тех пределах, в которых применима элементарная физика.

**З а м е ч а н и е 1.** Говоря об идеальной пружине, с помощью которой было дано определение массы, мы имели в виду следующие ее свойства:

- а) при взвешивании тело  $A \oplus B$  растягивает пружину больше, чем тело  $A$ ;
- б) при повторных взвешиваниях одного и того же тела пружина растягивается до одной и той же отметки.

Таким образом, мы не предполагали, что для нашей пружины обязательно справедлив закон Гука, и шкала, на которой мы делаем отметки при взвешиваниях, может получиться неравномерной.

На практике идеальные пружины, по-видимому, не встречаются, и взвешивание тел на рычажных весах дает значительно более точный результат. «Идеальная пружина» была нам нужна лишь для того, чтобы ввести понятие массы логически непротиворечивым образом.

**З а м е ч а н и е 2.** Общепринятой единицей массы служит 1 килограмм; соответствующий эталон представляет собой цилиндр, выполненный из сплава платины и иридия. Этот эталон хранится в Международном бюро мер и весов в г. Севр (Франция). С высокой степенью точности масса упомянутого эталона совпадает с массой 1 кубического дециметра (литра) воды при температуре  $4^{\circ}\text{C}$  и атмосферном давлении в одну атмосферу (см. [12]).

Итак, мы более или менее разобрались с тремя основными, или первичными, величинами классической механики — длиной, временем и массой, единицы измерения которых мы будем в общем случае обозначать через  $L$ ,  $T$  и  $M$ . Остальные величины, встречающиеся в механике (и геометрии), принято называть вторичными, поскольку их измерение удастся свести к измерениям первичных величин и последующим вычислениям.

В сущности, выбор длины, времени и массы в качестве трех основных величин механики определен их важностью, а также соображениями удобства при стандартизации измерений. Вообще говоря, в качестве основной величины можно было бы взять одну только длину. При этом массу груза можно было бы измерять удлинением пружины, к которой он подвешен, а длительность временного интервала — длиной пути, пройденного отме-

ченной точкой, расположенной на краю равномерно вращающегося диска. Однако такое соглашение привело бы к большим практическим неудобствам. В частности, стандартизировать пружины и обеспечить их «идеальность» практически невозможно; кроме того, измерять массу всегда приходилось бы на одной и той же высоте над уровнем моря. Что касается упомянутого выше измерения времени при помощи длины, то такая возможность представляется вполне осуществимой. Однако в классической механике время — это все-таки не длина, и, лишив время его собственной единицы измерения, мы были бы вынуждены говорить так: «путник прошел 5 метров длины за 6 сантиметров времени»...

## § 10. УГОЛ И ЕГО ВЕЛИЧИНА

Величина угла — это вторая по счету (после длины) геометрическая величина, о которой мы будем говорить.

Мы будем рассматривать углы, расположенные на евклидовой плоскости, которую можно представлять себе погруженной в трехмерное евклидово пространство. (Когда речь пойдет о процедурах измерения, мы будем понимать под евклидовым пространством  $E_{\text{физ}}$ . Сказанное относится также к содержанию следующего параграфа.)

Напомним, что угол — это геометрическая фигура, представляющая собой часть плоскости, ограниченную двумя лучами, исходящими из одной точки, называемой *вершиной* угла.

Лучи, ограничивающие угол, называются его *сторонами*. (Предполагается, что точки, лежащие на сторонах угла, принадлежат этому углу.)

«Нулевой угол», состоящий из двух совпавших лучей, мы не рассматриваем.

Угол называется *развернутым*, если его стороны образуют единую прямую. Угол называется *полным*, если его стороны совпали и он содержит хотя бы одну внутреннюю (т. е. не лежащую на стороне) точку. Таким образом, развернутый угол — это полуплоскость, а полный угол — это вся плоскость.

Скажем, что угол  $A$  состоит из углов  $B$  и  $C$ , или, иначе, что угол  $A$  может быть *разбит* на углы  $B$  и  $C$  ( $A = B \oplus C$ ), если

- каждая точка, принадлежащая углу  $A$ , принадлежит по крайней мере одному из углов  $B$  и  $C$ ;
- у углов  $B$  и  $C$  имеются общая вершина, общая сторона и нет общих внутренних точек.

*Величиной угла*  $A$  назовем класс углов, конгруэнтных углу  $A$  (этот класс мы будем обозначать через  $\Phi_A$ ).

Сумма величин углов определяется равенством

$$\Phi_{B \oplus C} = \Phi_B + \Phi_C. \quad (10.1)$$

Как обычно, по определению считаем, что

$$\Phi_A > \Phi_B \quad (\Phi_B < \Phi_A),$$

если

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_C$$

для некоторого угла  $C$ .

Геометрически очевидно, что не существует угла  $A$ , представляемого в виде

$$A = \Pi \oplus B,$$

где  $\Pi$  — полный угол. Отсюда следует, что выражение  $\varphi_\Pi + \varphi_B$  не определено, так что величины не любых двух углов можно складывать. Таким образом, множество величин углов заведомо не удовлетворяет всем аксиомам Колмогорова — Александрова.

Тем не менее, действуя в духе § 3, нетрудно показать, что если  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  — величины двух произвольных углов, то для некоторого  $k > 0$

$$\varphi_A = k\varphi_B, \quad (10.2)$$

где умножение величины угла на положительное число имеет тот же смысл, что и для величин, удовлетворяющих всем аксиомам Колмогорова — Александрова. Соотношение (10.2) мы будем записывать также в эквивалентном виде

$$\frac{\varphi_A}{\varphi_B} = k. \quad (10.2')$$

Далее, если на плоскости задана какая-либо окружность, то всякий угол с вершиной в центре этой окружности мы будем называть *центральной* (по отношению к упомянутой окружности). Ясно, что о любом угле можно говорить как о центральном, имея в виду подходящую окружность.

Справедлива следующая

**Теорема 10.1** (см., например, [14]). Пусть  $A$  и  $B$  — центральные углы по отношению к некоторой окружности. Тогда

$$\frac{\varphi_A}{\varphi_B} = \frac{l_A}{l_B}, \quad (10.3)$$

где  $l_A$  и  $l_B$  — длины дуг, заключенных между сторонами соответствующих углов.

*Доказательство* этой теоремы геометрически очевидно. На рис. 8 изображен случай, когда  $\varphi_B = 3\varphi_A$ .

В качестве единицы измерения величин углов берется величина такого центрального угла  $A_0$ , что

$$\frac{l_{A_0}}{r} = 1, \quad (10.4)$$

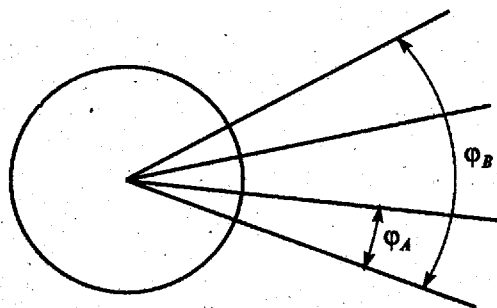


Рис. 8

где  $l_{A_0}$  — длина дуги, заключенной между сторонами угла  $A_0$ ,  $r$  — длина радиуса окружности. Введенная единица измерения называется *радианом*. Нетрудно видеть, что отношение  $l_{A_0}/r$  не зависит от длины радиуса выбранной окружности.

В соответствии с (10.2) величина любого угла  $A$  может быть выражена в радианах:

$$\Phi_A = k\Phi_{A_0} = k \text{ рад.} \quad (10.5)$$

С другой стороны, не ограничивая общности, можно считать, что углы  $A$  и  $A_0$  являются центральными по отношению к одной и той же окружности. Тогда из теоремы 10.1, очевидно, имеем

$$\frac{\Phi_A}{\Phi_{A_0}} = \frac{l_A}{l_{A_0}},$$

где  $l_A$  и  $l_{A_0}$  — длины дуг, заключенных между сторонами соответствующих углов, откуда с учетом (10.4) получаем

$$\Phi_A = \frac{l_A}{r} \Phi_{A_0} \equiv \frac{l_A}{r} \text{ рад.}$$

Таким образом, в (10.5)

$$k = \frac{l_A}{r}, \quad (10.6)$$

т. е. радианная мера любого центрального угла равна отношению длины дуги, заключенной между сторонами этого угла, к длине радиуса соответствующей окружности.

Из (10.6) очевидно, что радианная мера любого угла не превосходит  $2\pi$ ; ясно также, что радианная мера развернутого и полного углов равна соответственно  $\pi$  и  $2\pi$ .

Угол называется *острым*, *прямым* или *тупым*, если его радианная мера соответственно меньше, равна или больше  $\frac{\pi}{2}$ .



В качестве иной единицы измерения величин углов принят градус ( $1^\circ$ ), равный  $\frac{1}{360}$  доле величины полного угла

$$1^\circ = \frac{2\pi \text{ рад}}{360} = \frac{\pi \text{ рад}}{180}; \quad (10.7)$$

переход от радианной меры к градусной осуществляется обращением соотношения (10.7):

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}. \quad (10.7')$$

Еще более мелкими, чем градус, единицами измерения величин углов являются минута ( $1'$ ) и секунда ( $1''$ ):

$$1^\circ = 60'; \quad 1' = 60''. \quad (10.8)$$

Интересно, что общепринятая в настоящее время запись величин углов в градусной мере (с использованием минут и секунд) практически не изменилась со времен Древней Греции (см. [1]).

В заключение этого параграфа приведем некоторые соображения о возможных способах измерения величин углов. Таких способов по крайней мере два. Первый способ состоит в непосредственном сравнении измеряемого угла с углом-эталоном; применяя транспортир, мы пользуемся именно этим способом.

Однако имеется и второй способ, который заключается в измерении длины дуги  $l_A$  и длины радиуса  $r$  и последующем вычислении отношения (10.6). Именно потому, что такой способ существует, величину угла считают вторичной (а не причисляют к основным величинам — длине, времени и массе).

**З а м е ч а н и е.** Очевидно, что при переходе к новым единицам длины отношение (10.6) (представляющее собой численное значение величины угла, измеренной в радианах) не меняется. Поэтому наименование единицы измерения углов (рад) обычно опускают и пишут

$$\varphi_A = k \text{ (вместо } \varphi_A = k \text{ рад)}. \quad (10.9)$$

## § 11. ПЛОЩАДЬ И ОБЪЕМ

Стараясь строго определить встречавшиеся нам величины разных родов, мы каждый раз сталкивались с новыми трудностями. Площадь и объем в этом смысле не исключение, и сейчас нам тоже не удастся пройти по колее, проложенной ранее.

Вначале договоримся об обозначениях.

Конгруэнтность геометрических фигур  $\Phi$  и  $\Phi'$  мы будем обозначать так:

$$\Phi \sim \Phi',$$

а запись

$$\Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2,$$

которую, как обычно, следует читать «фигура  $\Phi$  состоит из фигур  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ » или «фигура  $\Phi$  может быть разбита на фигуры  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ », означает, что точечное множество  $\Phi$  является объединением точечных множеств  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , причем у  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  нет общих внутренних точек.

**Площадь.** Мы хотим определить новую величину — площадь  $S$ , налагая на нее условия, подобные тем, которым подчинялись уже встречавшиеся нам ранее геометрические величины — длина и величина угла.

А именно, мы хотим, чтобы площади конгруэнтных плоских геометрических фигур совпадали:

$$S(\Phi) = S(\Phi'), \text{ если } \Phi \sim \Phi', \quad (11.1)$$

и, кроме того, чтобы можно было задать однозначную операцию сложения для площадей с помощью равенства

$$S(\Phi_1 \oplus \Phi_2) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2). \quad (11.2)$$

Однако нас сразу же подстерегает неприятность. Из условий (11.1), (11.2) следует, что величину  $S$ , заданную на множестве плоских фигур, нельзя определить как класс конгруэнтных фигур. (А ведь именно так мы определяли длину отрезка и величину угла!) Действительно, разбив, например, квадрат  $\Phi$  на два прямоугольника  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  мы можем составить из них невыпуклый восьмиугольник  $\Phi'$ , который, очевидно, не будет конгруэнтен исходному квадрату (см. рис. 9).

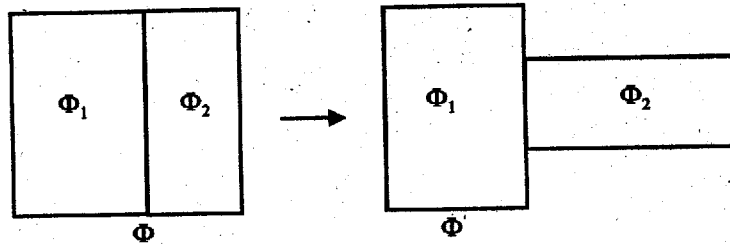


Рис. 9

Однако в силу (11.2) должно быть  $S(\Phi) = S(\Phi')$ .

Следовательно, если определить  $S(\Phi)$  как некий класс плоских фигур, то этот класс должен заведомо содержать не только фигуры, конгруэнтные  $\Phi$ . Таким образом, мы не знаем, к чему отнести требования (11.1) и (11.2). (При определении длины отрезка или величины угла мы ни с чем подобным не сталкивались.)

Поэтому мы будем действовать осторожно и постепенно — сначала определим не саму площадь, а ее численное значение при выбранной единице длины. И только потом — площадь как класс плоских фигур, для которых численное значение площади одно и то же.

Мы начнем с того, что определим численное значение площади многоугольников.

Итак, выберем длину  $L$  некоторого фиксированного отрезка в качестве единицы длины и рассмотрим квадрат  $Q_L^0$  со стороны длины  $L$ ; затем по определению положим, что численное значение площади квадрата  $Q_L^0$  при выбранной единице длины равно 1. Численное значение площади мы будем обозначать через  $f_L$ ; таким образом, наше условие можно записать в виде

$$f_L(Q_L^0) = 1. \quad (11.3)$$

Что касается условий (11.1) и (11.2), мы потребуем, чтобы выполнялись их аналоги для численных значений площади многоугольников:

$$f_L(Q) = f_L(Q'), \text{ если } Q \sim Q'; \quad (11.4)$$

$$f_L(Q_1 \oplus Q_2) = f_L(Q_1) + f_L(Q_2). \quad (11.5)$$

Требования (11.4), (11.5) выгодно отличаются от (11.1), (11.2) тем, что понятно, к чему они относятся. Это — требования, налагаемые на числовую функцию  $f_L$ , и знак «плюс» в правой части (11.5) имеет обычный смысл.

Нашим последним условием, налагаемым на функцию  $f_L$ , будет требование ее положительности на классе многоугольников:

$$f_L(Q) > 0. \quad (11.6)$$

Наше изложение в основном следует [3] и будет конспективным.

Прежде всего, предположив, что функция  $f_L$ , удовлетворяющая условиям (11.3)–(11.6), существует, нетрудно вывести, что для произвольного прямоугольника  $\Pi_{aL, bL}$ , длины сторон которого равны соответственно  $aL$ ,  $bL$ , должно быть

$$f_L(\Pi_{aL, bL}) = ab \quad (11.7)$$

(здесь  $a, b > 0$ ).

Затем из (11.7) и рис. 10 очевидно, что для произвольного треугольника  $\Delta_{aL, hL}$ , у которого длины основания и высоты соответственно равны  $aL$  и  $hL$ , должно выполняться равенство

$$f_L(\Delta_{aL, hL}) = \frac{ah}{2} \quad (11.7')$$

(здесь  $a, h > 0$ ).

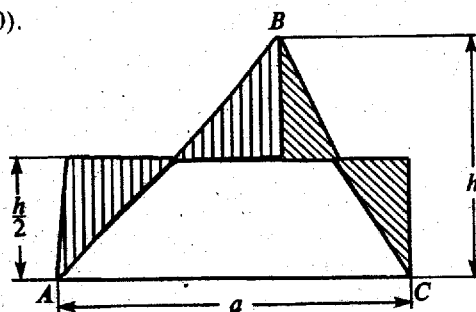


Рис. 10

Пусть теперь  $Q$  — произвольный многоугольник; геометрически очевидно, что его всегда можно разбить на конечное множество треугольников (см. рис. 11):

$$Q = \Delta_{a_1L, h_1L} \oplus \dots \oplus \Delta_{a_nL, h_nL}. \quad (11.8)$$

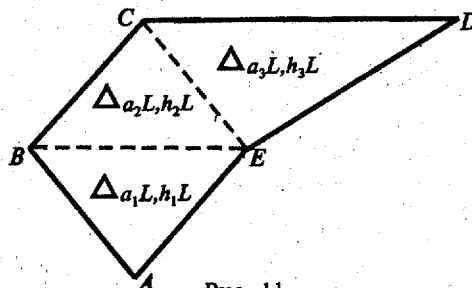


Рис. 11

Следовательно, если функция  $f_L$  существует, то в силу (11.7') должно быть

$$f_L(Q) = \frac{a_1 h_1 + \dots + a_n h_n}{2}. \quad (11.9)$$

Под словом «функция» мы понимаем, как это обычно принято, однозначную функцию, т. е. функцию, принимающую одно единственное значение при каждом значении аргумента.

Из (11.9), очевидно, следует, что если на множестве многоугольников однозначная и удовлетворяющая условиям (11.3)–(11.6) функция  $f_L$  существует, то она может быть только одна.

Заметим теперь, что для любого треугольника произведение меры длины основания на меру длины опущенной на нее высоты не зависит от того, какую именно сторону треугольника мы принимаем за его основание (см. рис. 12).

Прямоугольные треугольники  $ACD$  и  $BCE$  подобны, поэтому

$$\frac{a_1}{h_2} = \frac{a_2}{h_1}.$$

Кроме того, можно показать (см., например, [3]), что выражение (11.9) не зависит от того, каким способом мы разбили многоугольник  $Q$  на треугольники. Следовательно, (11.9) представляет собой однозначную функцию, определенную на множестве всех многоугольников. То, что эта функция удовлетворяет всем трем условиям (11.3)–(11.6), очевидно.

Посмотрим теперь, как изменится численное значение площади произвольного многоугольника  $Q$  при переходе к новой единице длины:

$$L = k\tilde{L}, \quad k > 0. \quad (11.10)$$

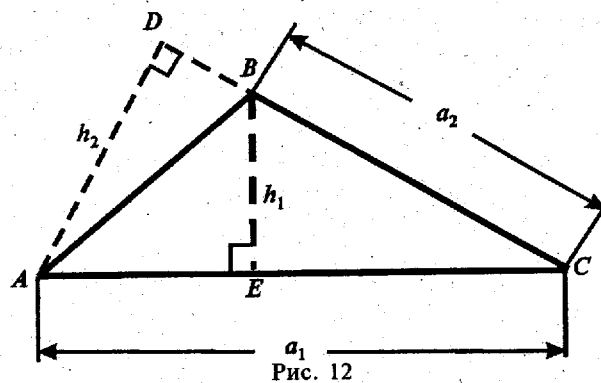


Рис. 12

Пусть, как прежде, (11.8) задает разбиение многоугольника  $Q$  на треугольники; подставляя (11.10) в (11.8), очевидно, имеем

$$Q = \Delta_{a_1 k \bar{L}, h_1 k \bar{L}} \oplus \dots \oplus \Delta_{a_n k \bar{L}, h_n k \bar{L}},$$

откуда по аналогии с (11.9) получаем

$$f_L(Q) = \frac{a_1 h_1 + \dots + a_n h_n}{2} k^2 = f_L(Q) \cdot k^2. \quad (11.11)$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы расширить множество, на котором определена функция  $f_L$ , включив туда плоские фигуры с криволинейными границами. Мы поступим следующим образом. Для каждой плоской ограниченной фигуры  $\Phi$ , содержащей хотя бы одну внутреннюю точку, рассмотрим два числа

$$\max_{\substack{Q \\ Q \subset \Phi}} f_L(Q) \quad \text{и} \quad \min_{\substack{Q \\ Q \supset \Phi}} f_L(Q) \quad (11.12)$$

(В первом из выражений (11.12) максимум берется по всем многоугольникам  $Q$ , содержащимся внутри  $\Phi$ , а во втором из этих выражений минимум берется по всем многоугольникам, объемлющим  $\Phi$ .) Если оба числа (11.12) совпадают, то фигуру  $\Phi$  будем называть *квадрируемой*, а любое из выражений (11.12) назовем численным значением площади фигуры  $\Phi$  (при выбранной единице длины  $L$ ).

Из (11.11) очевидно, что квадрируемость плоской фигуры не зависит от выбранной единицы длины.

Нетрудно показать, что всякая ограниченная плоская фигура с кусочно-гладкой границей заведомо квадрируема. В дальнейшем, говоря о квадрируемых фигурах, мы будем всегда предполагать, что их границы кусочно-гладкие и что эти фигуры содержат хотя бы одну внутреннюю точку.

Итак, пусть  $\Phi$  — плоская квадрируемая фигура; нетрудно видеть, что справедлива формула, аналогичная (11.11):

$$f_L(\Phi) = f_L(\Phi) \cdot k^2. \quad (11.13)$$

Определим теперь площадь  $S$  плоской квадрируемой фигуры  $\Phi$  как класс таких плоских квадрируемых фигур  $\Phi_\alpha$ , для которых

$$f_L(\Phi_\alpha) = f_L(\Phi).$$

(В силу (11.13) наше определение площади, очевидно, не зависит от выбранной единицы длины.)

Далее, сумма площадей квадрируемых плоских фигур определяется равенством (11.2). Мы предоставляем читателю возмож-

ность проверить, что введенная нами величина — площадь  $S$  — удовлетворяет всем аксиомам Колмогорова — Александрова.

Пользуясь теперь теоремой 3.2, заключаем, что для любой плоской квадрируемой фигуры  $\Phi$  найдется такая вещественная постоянная  $c > 0$ , что

$$S(\Phi) = cS(Q_L^0) \quad (11.14)$$

(напомним, что  $Q_L^0$  — квадрат со стороной длины  $L$ ).

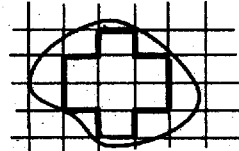


Рис. 13

Покрывая фигуру  $\Phi$  масштабной сеткой (палеткой), состоящей из квадратов со стороной длины  $L, \frac{L}{10}, \frac{L}{100}, \dots$ , легко получаем,

что в (11.14)  $c = f_L(\Phi)$  (см. рис. 13).

Итак, (11.14) может быть переписано в виде

$$S(\Phi) = f_L(\Phi)S(Q_L^0). \quad (11.15)$$

Перейдем теперь к новой единице длины  $\tilde{L}$ , связанной с  $L$  формулой (11.10), и запишем аналог соотношения (11.15):

$$S(\Phi) = f_{\tilde{L}}(\Phi)S(Q_{\tilde{L}}^0). \quad (11.15')$$

(здесь  $Q_{\tilde{L}}^0$  — квадрат со стороной длины  $\tilde{L} = \frac{L}{k}$ ).

Приравнявая теперь правые части (11.15) и (11.15') и учитывая (11.13), получаем

$$S\left(Q_{\frac{L}{k}}^0\right) = \frac{1}{k^2}S(Q_L^0). \quad (11.16)$$

Имея в виду именно это равенство, мы будем использовать следующую условную запись для единицы площади

$$S(Q_L^0) = L^2. \quad (11.17)$$

Итак, к чему же мы пришли в результате наших построений? Мы внесли некоторую дополнительную ясность в «и без того ясные» вещи.

Во-первых, мы теперь можем уверенно сказать, что площадь какой-нибудь плоской фигуры  $\Phi$  — это класс плоских фигур, имеющих то же численное значение площади, что и  $\Phi$ .

Во-вторых, мы теперь понимаем, что, например, выражение  $15 \text{ см}^2$  представляет собой произведение числа 15 на  $\text{см}^2$  — площадь квадрата со стороной, имеющей длину один сантиметр; при

этом запись  $\text{см}^2$  — это удобное условное обозначение для упомянутой площади.

В заключение отметим, что принципиально различных способов узнать, какова площадь квадратируемой плоской фигуры, существует по крайней мере два.

Пусть для простоты речь идет о площади многоугольника  $Q$ . Тогда, как мы уже отмечали выше, можно воспользоваться масштабной сеткой и подсчитывать число квадратов со сторонами  $L, L/10, \dots$ , целиком содержащихся внутри  $Q$ . В сущности, этот способ представляет собой процедуру сравнения с эталоном площади. Однако имеется и другой способ, о котором мы тоже говорили выше: нужно измерить длины сторон и высот треугольников, из которых состоит многоугольник  $Q$ , и провести затем соответствующие вычисления (см. (11.9)). Именно благодаря наличию этого, второго, способа площадь (как и величину угла) причисляют к вторичным величинам.

**Объем.** Что касается объема геометрических тел, то он вводится в основном по той же схеме, что и площадь плоских фигур [3].

Вначале фиксируется единица длины  $L$ , а затем ищется заданная на множестве многогранников числовая функция  $g_L$  — численное значение (мера) объема при заданной единице длины, удовлетворяющая условиям, аналогичным (11.3)–(11.6):

$$\begin{aligned} g_L(P_L^0) &= 1; \\ g_L(P) &= g_L(P'), \text{ если } P \sim P'; \\ g_L(P_1 \oplus P_2) &= g_L(P_1) + g_L(P_2); \\ g_L(P) &> 0 \end{aligned} \quad (11.18)$$

(здесь  $P_L^0$  — куб с ребром длины  $L$ ).

Можно показать, что на множестве многогранников существует единственная функция  $g_L$ , удовлетворяющая условиям (11.18). Доказательство этого факта проводится почти так же, как и в случае функции  $f_L$ , причем вместо разбиения многоугольника на треугольники используется разбиение многогранника на тетраэдры. Тогда, если

$$P = \Theta_1 \oplus \dots \oplus \Theta_n,$$

где  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  — тетраэдры, то

$$g_L(P) = g_L(\Theta_1) + \dots + g_L(\Theta_n),$$



при этом, чтобы удовлетворить требованиям (11.18), меру объема тетраэдра следует положить равной одной трети произведения меры площади его основания на меру длины высоты, опущенной на это основание. Объем  $V(P)$  произвольного многогранника может быть записан тогда в виде

$$V(P) = g_L(P) \cdot L^3. \quad (11.19)$$

Затем рассматриваются объемные тела, которые могут быть сколь угодно точно приближены изнутри и извне с помощью многогранников (эти тела называются *кубируемыми*), и определяется их объем, подобно тому, как ранее определялась площадь плоских квадрируемых фигур с криволинейными границами. Тела, граница которых состоит из конечного числа кусков гладких поверхностей, заведомо будут кубируемыми.

Как и площади, объемы могут быть измерены по крайней мере двумя принципиально различными способами. Пусть для простоты рассматриваемое тело представляет собой многогранник  $P$ . Тогда один из упомянутых способов сводится к измерению длин ребер тетраэдров, на которые может быть разбит многогранник  $P$ , и последующим вычислениям. Именно существование такого способа заставляет нас причислять объем к вторичным величинам, а не к основным.

Другой способ основан на непосредственном сравнении измеряемого объема с эталоном. Если речь идет об объеме, занимаемом твердым физическим телом, то этот способ проще всего реализовать, погружая тело в жидкость.

## **§ 12. РАВНОВЕЛИКОСТЬ И РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ**

---

Итак, мы ввели в рассмотрение важнейшие геометрические величины: длину, площадь, объем и величину угла. Эти понятия необходимы нам для повседневного употребления в физическом пространстве, т. е. в пространстве, в котором мы живем. Однако строгое аксиоматическое определение вышеперечисленных понятий удастся дать только в случае абстрактного евклидова пространства, тогда как для физического пространства эти понятия можно ввести, только приняв на веру, что нам откуда-то известно, что такое точка, прямая и плоскость.

Невзирая на указанное тревожное обстоятельство, длина, площадь, объем и величина угла превосходно служат нам в практических расчетах, подтверждая правильность нашей геометрической интуиции.

В этом параграфе мы приведем (без доказательства) четыре математических результата, которые, будучи собраны вместе, заставляют задуматься о том, насколько наша геометрическая интуиция заслуживает доверия.

Нам понадобятся следующие определения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1.** Два многоугольника называются *равновеликими*, если их площади равны.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2.** Два многоугольника называются *равносоставленными*, если их можно разбить на конечное число соответственно конгруэнтных друг другу многоугольников.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.3.** Два многогранника называются *равновеликими*, если их объемы равны.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.4.** Два многогранника называются *равносоставленными*, если их можно разбить на конечное число соответственно конгруэнтных друг другу многогранников.

Справедлива следующая замечательная теорема, доказанная в 30-х годах XIX в.

**Теорема 12.1** (Ф. Больяи — П. Гервин; см. [3]). Равновеликие многоугольники равносоставлены.

(То, что обратное утверждение тоже верно, очевидно из определения площади.)

Вопрос о том, имеет ли место аналог теоремы Больяи — ГERVина для многогранников, Давид Гильберт включил (под номером «три») в специально составленный список из двадцати трех важнейших нерешенных математических задач. Этот список был оглашен им в 1900 г. на II Международном математическом конгрессе в Париже. А уже спустя год М. Ден установил следующий впечатляющий результат.

**Теорема 12.2.** Правильный тетраэдр не равносоставлен с равновеликим ему кубом.

Тем самым третья проблема Гильберта получила свое отрицательное решение.

Очевидно, однако, что *равносоставленные многогранники являются равновеликими*. Это утверждение сразу следует из определения объема многогранника и определения равносоставленности.

Геометрическая интуиция подсказывает нам, что для справедливости этого утверждения неважно, что части, из которых составлены наши многогранники, сами являются многогранниками. Кажется даже, что эти части могут быть любыми, лишь бы они были соответственно конгруэнтны друг другу.

Однако справедлив следующий совершенно фантастический результат, полученный С. Банахом и А. Тарским в 1924 г. (см. по этому поводу [16]).

**Теорема 12.3.** Любой многогранник  $P$  можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся фигур, из которых при помощи движений можно собрать любой другой многогранник  $P'$  (не обязательно равновеликий многограннику  $P$ ).

Приведем еще одну поражающее воображение теорему, доказанную Р. Робинсоном в 1947 г.

**Теорема 12.4** (см. [16] и имеющиеся там ссылки). Любой шар  $K$  можно представить в виде объединения пяти непересекающихся фигур, двигая которые как твердые тела, можно собрать два новых шара, каждый из которых конгруэнтен шару  $K$ .

Доказательства этих удивительных теорем неконструктивны (т. е. не содержат конкретных алгоритмов превращения одного многогранника в другой и соответственно одного шара в два

равных ему по объему) и основаны на так называемой *аксиоме выбора*, которая формулируется следующим образом:

*Если имеется (вообще говоря, бесконечное) семейство непустых множеств, то всегда можно, взяв по одному элементу из каждого множества, образовать из выбранных элементов новое множество.*

В течение длительного времени математики вели споры, правомерно ли использовать аксиому выбора, фактически утверждающую, что человеческий разум в состоянии «единым взглядом» охватить бесконечное семейство множеств, одновременно выхватив в каждом из них по элементу. Сейчас эти споры в основном утихли, и аксиома выбора считается неотъемлемым инструментом математики, поскольку, как заметил известный математик П. Леви, отказ от нее «приводит к еще более парадоксальным следствиям».

Итак, вполне возможно, что парадоксальные результаты теорем 12.3 и 12.4 говорят вовсе не о том, что аксиома выбора непригодна для математических рассуждений, а о том, что наше интуитивное восприятие геометрии окружающего мира не вполне адекватно.

### § 13. ПЕРЕМЕЩЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. СИСТЕМА ОТСЧЕТА

---

В этом и двух следующих параграфах мы будем говорить о перемещении небольшого, по сравнению с протяженностью своего маршрута, материального тела — «материальной точки». Перемещение материальной точки — это изменение ее положения в (физическом) пространстве, и его не следует путать с общим понятием движения, введенным в § 4 и характеризовавшим преобразование самого пространства.

Еще одно отличие перемещения материальной точки от движения — преобразования пространства состоит в том, что первое происходит во времени, тогда как второе не обязано иметь какое-либо отношение ко времени и может осуществляться мгновенно.

Чтобы иметь возможность описывать перемещение материальной точки, необходимо уметь фиксировать положение этой точки в каждый данный момент времени. Для этого нам понадобится понятие *системы отсчета*, или, что то же самое, *системы координат*.

Если единица длины  $L$  выбрана, то в качестве такой системы отсчета можно взять произвольную точку  $O$  (*начало координат*) и любые три проходящие через нее взаимно перпендикулярные прямые  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  (*оси координат*).

При этом предполагается, что

а) совокупность всех трех осей координат ведет себя как единое твердое тело;

б) оси координат снабжены разметкой, произведенной общезвестным способом, в соответствии с выбранной единицей длины. (Если, например, точка  $A$  лежит на оси  $Ox$  и имеет координату  $x_0$ , то  $|x_0|$  — это численное значение длины отрезка  $OA$  при единице длины  $L$ .)

Такую систему координат называют декартовой по имени жившего в XVII в. французского математика и философа Рене Декарта, который впервые предложил ее использовать.

Теперь материальной точке  $P$  можно в каждый момент времени сопоставить упорядоченную тройку вещественных чисел — ее пространственные координаты  $(x, y, z)$ ; см. рис. 14.

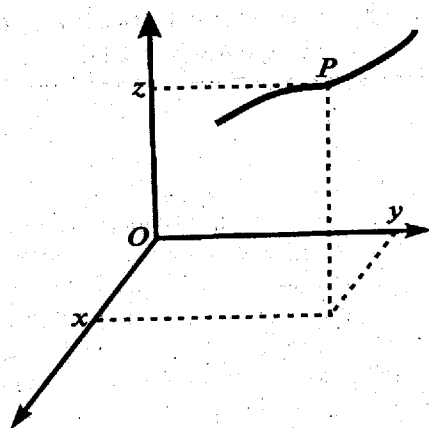


Рис. 14

Чтобы охарактеризовать изменяющееся со временем положение точки  $P$  в системе  $Oxyz$ , мы будем использовать обозначения:

$$P = P(x, y, z), \quad (13.1)$$

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad z = z(\tau), \quad (13.2)$$

где  $\tau$  — координата вдоль оси времени.

(Предполагается, что начало отсчета и единица измерения времени уже выбраны.)

#### **§ 14. РАВНОМЕРНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ. СКОРОСТЬ КАК ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ**

Наиболее простой и, возможно, самый важный тип перемещения материальной точки — это прямолинейное равномерное. Вот что гласит *принцип инерции*, обнаруженный Галилеем:

«В системе координат, не испытывающей вращения относительно далеких звезд и связанной с твердым телом, на которое не действуют никакие внешние силы, материальная точка, предоставленная сама себе, будет равномерно перемещаться вдоль прямой линии или оставаться в состоянии покоя».

(Равномерность перемещения точки означает, что длины путей, преодолеваемых точкой за равные промежутки времени, равны.)

Однако равномерным бывает не только перемещение по прямой линии. Например, в системе координат, связанной с равномерно едущим вдоль прямой велосипедом, любая точка на ободе его колеса будет равномерно перемещаться по окружности. Мы будем считать очевидным, что материальная точка может перемещаться равномерно вдоль любой разумной кривой (т. е. вдоль любой кривой, имеющей длину).

Попробуем теперь определить, что такое скорость материальной точки; рассмотрим следующий пример.

Допустим, что равномерно идущий пешеход за пять часов проходит шесть километров. Тогда из равномерности перемещения пешехода следует, что за 10 часов он пройдет 12 километров, за 15 часов — 18 километров и т. д. Мы замечаем, что

$$\frac{6}{5} = \frac{10}{12} = \frac{18}{15} = \dots$$

Более того, опираясь на равномерность перемещения пешехода, нетрудно вывести, что при выбранных нами единицах длины (километр) и времени (час) отношение

численное значение длины пути

численное значение затраченного времени

(14.1)

не зависит от выбранного участка пути (и всегда равно 6/5). Тем самым это отношение — важнейшая характеристика рассматриваемого перемещения в целом.

Взяв иные единицы длины и времени, мы придем к аналогичному результату: отношение (14.1) не будет зависеть от рассматриваемого участка пути.

Теперь мы в состоянии дать определение скорости равномерного перемещения.

А именно, назовем *скоростью равномерного перемещения материальной точки* величину  $v$ , численное значение которой при выбранных единицах длины и времени равно отношению (14.1).

Посмотрим, как преобразуется численное значение скорости при замене единиц измерения. Допустим, что материальная точка, перемещаясь равномерно, проходит путь длиной  $s = \alpha L$  за время  $t = \beta T$  (здесь  $L$  — единица длины;  $T$  — единица времени;  $\alpha, \beta$  — положительные числа). Тогда в соответствии с нашим определением численное значение скорости материальной точки будет равно  $\alpha/\beta$ . Если мы перейдем к новым единицам длины и времени  $L_1, T_1$ , связанным с прежними при помощи соотношений

$$L = pL_1, \quad T = qT_1, \quad (p, q > 0),$$

то в новых единицах численное значение длины пути станет равным  $\alpha p$ , а численное значение затраченного времени станет равным  $\beta q$ . Тем самым численное значение скорости изменится и сделается равным  $\frac{\alpha p}{\beta q}$ .

Поэтому нам удобно условиться, что сама скорость  $v$  имеет вид

$$v = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{L}{T}, \quad (14.2)$$

или, что то же самое,

$$v = \frac{s}{t}. \quad (14.3)$$

Подчеркнем еще раз, что формально имеющее вид дроби выражение  $s/t$  представляет собой условное обозначение, применяемое для упрощения вычислений, и не является дробью «в обычном смысле». Сказанное относится также и к величине

$$\frac{L}{T}, \quad (14.4)$$

которую называют *единицей скорости*, отвечающей выбору единицы длины  $L$  и единицы времени  $T$ .

**Замечание 1.** Удобство записи (14.3) именно в том, что она позволяет, не задумываясь, производить пересчет численного значения скорости при переходе от одних единиц длины и времени



к другим. Так, в примере, рассмотренном выше, скорость пешехода равна

$$v = \frac{6 \text{ км}}{5 \text{ ч}} = \frac{6 \cdot 1000 \text{ м}}{5 \cdot 60 \text{ мин}} = 20 \frac{\text{м}}{\text{мин}}.$$

**З а м е ч а н и е 2.** То, что скорость является вторичной величиной, очевидно из ее определения.

**З а м е ч а н и е 3.** К приведенному выше определению скорости можно придаться. А вдруг существует несколько величин разных родов, характеризующих равномерное перемещение материальной точки, и каждой из этих величин можно сопоставить все то же численное значение (14.1)? Здравый смысл подсказывает, что это не так. Однако можно легко избавиться от кажущейся неоднозначности определения, сказав, что скорость — это класс всех таких равномерных перемещений материальной точки, для которых отношение (14.1) имеет одно и то же значение (при выбранных единицах длины и времени).

Итак, мы знаем, что такое скорость равномерного перемещения материальной точки, и, очевидно, можем скорости сравнивать ( $5 \text{ км/ч} < 6 \text{ км/ч}$ , так как  $5 < 6$ ), причем введенное отношение «меньше» для скоростей имеет совершенно прозрачный физический смысл. Однако складывать скорости мы пока еще не умеем. Мы не хотим считать, что равенство

$$5 \frac{\text{км}}{\text{ч}} + 6 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 11 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \quad (14.5)$$

справедливо по определению, не сопоставив знаку «плюс» в (14.5) никакой физически осмысленной процедуры. Если бы мы так поступили, это обесценило бы обоснованную ранее аддитивность других величин.

Впрочем, дело можно поправить, если взглянуть на скорость с несколько иной точки зрения. А именно, предположим, что у нас имеется не одна, а несколько материальных точек  $P_1, \dots, P_n$ , которые, равномерно перемещаясь по своим маршрутам, оставляют за собой тонкие нити. Пусть снова  $L$  — единица длины,  $T$  — единица времени, и пусть точка  $P_i$  за время  $t = \beta T$  проходит путь длиной  $s = \alpha_i L$ . (Здесь  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , и  $\beta$  — положительные вещественные числа.) Составим взамен (14.1) выражение

$$\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\beta}$$

и назовем его численным значением производительности системы  $\{P_1, \dots, P_n\}$  при единице длины  $L$  и единице времени  $T$ . Сама

же производительность — это класс всех таких конечных систем равномерно перемещающихся материальных точек, у которых численное значение производительности одно и то же. В качестве единицы производительности, очевидно, следует взять отношение (14.4). Наконец, отметим, что для производительности системы  $\{P_1, \dots, P_n\}$  можно по-прежнему пользоваться формулой (14.3), где теперь следует положить

$$s = s_1 + \dots + s_n.$$

Далее, очевидно, что если система состоит из одной единственной точки  $P$ , то производительность такой системы — это просто скорость точки  $P$ .

Но производительности систем уже можно складывать! А именно, пусть  $v$  — производительность системы  $\{P_1, \dots, P_n\}$ , а  $w$  — производительность системы  $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ . Определим теперь сумму производительностей

$$v + w$$

как производительность объединенной системы:

$$\{P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_m\}$$

(предполагается, что все  $P_i$  и  $Q_j$  попарно различны).

Теперь мы видим, что скорости двух равномерно перемещающихся материальных точек можно складывать, рассматривая их как производительности систем, каждая из которых состоит из одной точки.

Нетрудно убедиться в том, что построенная нами в результате величина «производительность» удовлетворяет всем аксиомам теории Колмогорова — Александрова.

**З а м е ч а н и е 1.** Для любых двух систем  $\{P_1, \dots, P_n\}$  и  $\{Q_1, \dots, Q_m\}$  с производительностями  $v$  и  $w$  соответственно теория Колмогорова — Александрова позволяет определить отношение  $\frac{v}{w}$ . Можно показать, что это отношение равно отношению численных значений соответствующих производительностей.

**З а м е ч а н и е 2.** Очевидно, что вместо равномерно перемещающихся точек, укладывающих нити вдоль своих маршрутов, мы могли бы рассматривать, например, популяцию пауков, сидящих на месте и равномерно прядущих свои нити, или, скажем, стадо коров, равномерно дающих молоко, — и в результате получить производительность, относящуюся к соответствующему продукту.

## § 15. РАВНОМЕРНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ВДОЛЬ ПРЯМОЙ. ДРУГОЙ ВЗГЛЯД НА СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

В предыдущем параграфе мы уже научились складывать скорости; сейчас мы дадим сложению скоростей другую физическую интерпретацию.

Пусть в системе координат  $Oxuz$ , связанной с каким-нибудь твердым телом, вдоль оси  $Ox$  равномерно перемещается материальная точка  $P$  со скоростью  $v$  (мы предполагаем, что перемещение происходит в положительном направлении). Рассматривая ось  $Ox$  как твердый стержень, мы можем забыть про остальные оси координат и следить за точкой  $P$ , измеряя время от времени ее расстояние до точки  $O$ .

Предположим теперь, что ось  $Ox$  равномерно скользит со скоростью  $w$  в положительном направлении вдоль оси  $O'x'$ , которую мы тоже представляем себе как твердый стержень. (Положительные направления у обеих осей мы считаем одинаковыми.)

Будем для простоты считать, что в момент  $t = 0$  все три точки —  $P$ ,  $O$  и  $O'$  занимают одно и то же положение (совпадают). Тогда к моменту  $t > 0$  получим (см. рис. 15):

$$|OP| = vt, |O'O| = wt,$$

$$|O'P| = |O'O| + |OP| = (v + w)t,$$

где сумму скоростей  $v + w$  мы пока умеем понимать лишь как «сумму производительностей». Однако сейчас выражение  $v + w$  можно интерпретировать совершенно по-иному — как скорость равномерного перемещения точки  $P$  вдоль оси  $O'x'$ , т. е. в новой системе координат, движущейся относительно первоначальной. Именно эту интерпретацию имеют в виду физики, когда говорят о «правиле сложения скоростей».

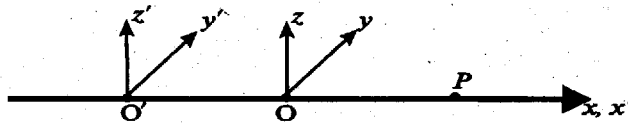


Рис. 15

При этом, правда, уже невозможно во всех случаях считать скорость положительной величиной (в смысле аксиом Колмогорова — Александрова).

Нетрудно видеть, что если мы хотим, чтобы упомянутое выше «правило сложения скоростей» было универсальным, то скорость перемещения тела вдоль оси координат следует считать положительной или отрицательной соответственно тому, в каком направлении (положительном или отрицательном) оно движется. Состоянию покоя, очевидно, следует сопоставить нулевую скорость.

Тогда правила обращения со скоростями любых знаков сведутся, как нетрудно проверить, к следующим:

а) если  $v$  — отрицательная скорость, то  $v = (-1)u$ , где  $u$  — положительная скорость;

б) каковы бы ни были вещественные числа  $\alpha$  и  $\beta$ ,

$$\alpha v + \beta v = (\alpha + \beta)v;$$

$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v.$$

**З а м е ч а н и е.** В общем случае, когда все участвующие в задаче перемещения происходят не обязательно вдоль одной-единственной прямой, скорость материальной точки в физике рассматривают как вектор, т. е. как величину, снабженную уже не знаком, а направлением. Однако рассмотрение векторных величин выходит за рамки этой книжки.

## § 16. СТОИМОСТЬ

В этом параграфе мы займемся новой величиной — стоимостью товара, которая отличается от всех встречавшихся нам ранее величин одной интересной особенностью: измерение стоимости (в отличие от измерений длины, времени, массы и т. п.) нельзя поручить приборам. Говорить о стоимости чего-либо в отсутствие людей (а точнее — развитого человеческого сообщества) вообще не имеет смысла, в то время как остальные перечисленные выше величины сохраняют, по-видимому, свой смысл, даже если на Земле не останется ни одного человека.

Итак, приступим к определениям.

Мы будем рассматривать продажу (покупку) товара как его обмен на золото, играющее для участников рынка роль универсального товара — посредника.

Назовем *стоимостью* товара  $A$  наибольшую массу золота, на которую этот товар можно обменять (в данный момент времени).

Таким образом, стоимость товара, вообще говоря, зависит от времени. Для упрощения изложения мы будем этой зависимостью пренебрегать. Обозначать стоимость товара  $A$  мы будем через  $c_A$ .

Далее, если товары  $A$  и  $B$  не имеют общих частей, их совокупность мы также будем считать товаром, который будем обозначать через  $A \oplus B$ .

Очевидно, что, например, стоимость замка с ключом не обязательно равна сумме стоимостей этих предметов. (Неравенство стоимостей можно гарантировать, если замок — не типовой.)

Чтобы не увязнуть в разборе таких ситуаций, мы будем рассматривать в качестве товаров только сыпучие тела и жидкости. Опыт показывает, что при продаже небольших партий товаров имеет место аддитивность:

$$c_{A \oplus B} = c_A + c_B. \quad (16.1)$$

(Выражение справа в (16.1) — это *сумма масс*, которая уже была нами определена в § 9.)

**З а м е ч а н и е 1.** Напомним, что мы считаем установленным из опыта фактом, что масса удовлетворяет аксиомам Колмогорова — Александрова.

Допустив, что для любой массы золота найдется товар, чьей стоимостью эта масса золота является, мы автоматически получаем, что стоимость оказывается величиной, удовлетворяющей тем же самым аксиомам, что и масса. Однако стоимость интересует нас как характеристика товара, а не золота. Поэтому, если бы равенство (16.1) не имело места, справедливость упомянутых аксиом для массы была бы для нас бесполезна. Мы обращаем внимание читателя на различие в подходах к определению массы (см. § 9) и к определению стоимости, которое мы только что привели.

**З а м е ч а н и е 2.** В качестве единицы стоимости мы можем выбрать любую из валют (доллар, рубль, евро и т. д.), считая их специфическими единицами массы золота.

## § 17. ЦЕНА

Покупая или продавая какой-либо однородный товар «на вес», мы можем установить, например, следующую закономерность (очевидно, согласующуюся с (16.1)):

1 кг товара стоит 5 руб.;

2 кг товара стоят 10 руб.;

3 кг товара стоят 15 руб.

и так далее. Сразу видно, что

$$\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} \dots \quad (17.1)$$

Фактически мы оказываемся в той же ситуации, что и в начале § 14, где речь шла о скорости равномерного движения. Итак, мы заключаем, что отношение (17.1) характеризует наш товар «в целом», и по определению полагаем, что (17.1) является численным значением новой, вводимой нами в рассмотрение, величины — цены товара.

Саму же цену товара, которую будем обозначать через  $\xi$ , мы вводим равенством

$$\xi = \frac{c}{m}, \quad (17.2)$$

смысл которого аналогичен смыслу выражения (14.3) (здесь  $c$  — стоимость товара,  $m$  — его масса).

Если в качестве единиц стоимости и массы взять соответственно рубль и килограмм и предположить, что стоимость товара —  $\alpha$  рублей, а его масса —  $\beta$  килограммов, то в соответствии с (17.2) получим, что цена товара окажется равной

$$\xi = \frac{\alpha \text{ руб.}}{\beta \text{ кг}} = \frac{\alpha \text{ руб.}}{\beta \text{ кг}}, \quad (17.3)$$

где  $\frac{\text{руб.}}{\text{кг}}$  — единица цены при выбранных единицах стоимости и массы. Выражение (17.3) для цены, очевидно, позволяет автоматически производить пересчет цен при переходе к другим единицам стоимости и массы.

Очевидно, мы можем ввести для цен отношение «меньше»  $\left(5 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}} < 6 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}}\right)$ , а кроме того, можем делить одну цену на другую  $\left(5 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}} : 6 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}} = 5 : 6\right)$ . При этом и введенное отношение «меньше», и операция деления для цен имеют ясное практическое истолкование.

В предисловии мы уже отмечали, что складывать цены бессмысленно (этим они отличаются от стоимостей). Если, например,  $40 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}}$  — цена сахарного песка, а  $1 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}}$  — цена песка обыкновенного, то сумма этих цен, очевидно, не будет ценой никакой смеси этих двух товаров. Считать же, что по определению сумма этих цен есть  $41 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}}$ , где  $41 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}}$  — цена неизвестно какого товара, мы не хотим, чтобы не вводить операции над величинами способом, не имеющим физического или практического истолкования.

А вот *разность цен* имеет превосходное истолкование. Например, равенство

$$40 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}} - 1 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}} = 39 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}} \quad (17.4)$$

говорит о том, какова экономия при покупке одного килограмма песка обыкновенного вместо одного килограмма сахарного песка. Для чистого математика эта ситуация, безусловно, удивительна: в абстрактной математике не бывает такого, чтобы вычитать было можно, а складывать нельзя!



## ДОБАВЛЕНИЕ 1

*Локшин А.А., Сагомонян Е.А. Определение величины в случае неустранимых погрешностей измерения*

На практике измерения всех важнейших величин (длины, времени, массы и т. д.) являются не точными, а приближенными. Однако определения всех этих величин были даны выше в предположении, что измерения абсолютно точны!

Покажем на примере *длины*, как следует видоизменить прежние определения в ситуации, когда точные измерения принципиально неосуществимы.

Будем говорить, что два отрезка  $AB$  и  $CD$  *приближенно конгруэнтны*, если, перемещая  $CD$  как твердое тело, мы сможем расположить его так, что точка  $C$  станет неотличима от точки  $A$ , а точка  $D$  станет неотличима от точки  $B$ . Этот факт мы будем записывать в виде

$$AB \approx CD. \quad (Д1.1)$$

Попробуем теперь определить «длину»  $\|AB\|$  отрезка  $AB$  как класс всех отрезков  $CD$ , для которых выполнено условие (Д1.1):

$$\|AB\| = \{CD \mid CD \text{ приближенно конгруэнтна } AB\}. \quad (Д1.2)$$

Очевидно, однако, что если имеются три отрезка  $AB$ ,  $CD$ ,  $C_1D_1$  и выполнены соотношения

$$AB \approx CD, \quad CD \approx C_1D_1,$$

то отсюда вовсе не следует, что

$$AB \approx C_1D_1.$$

Таким образом, опираясь на определение (Д1.2), мы *не можем заключить*, что из  $AB \approx CD$  следует  $\|AB\| = \|CD\|$ .

Может показаться, что в этом нет ничего страшного. Беда заключается, однако, в том, что такие «длины» невозможно складывать (из-за накапливающихся погрешностей).

Но как определить тогда понятие длины?

Проще всего поступить следующим образом, определив *длину*  $|AB|$  отрезка  $AB$  соотношением

$$|AB| = \{A_1B_1 \mid \|A_1B_1\| = \|AB\|\}. \quad (Д1.3)$$

Справедлива следующая

**Теорема.** Пусть пересечение классов

$$|AB| = \{A_1 B_1 \mid \|A_1 B_1\| = \|AB\|\}$$

и

$$|CD| = \{C_1 D_1 \mid \|C_1 D_1\| = \|CD\|\}$$

непусто. Тогда классы  $|AB|$  и  $|CD|$  совпадают.

*Доказательство.* Пусть отрезок  $a$  принадлежит пересечению классов  $|AB|$  и  $|CD|$  (т. е. принадлежит каждому из этих классов). Тогда в силу определения (Д1.3) из того, что  $a \in |AB|$ , имеем

$$\|a\| = \|AB\|,$$

а из того, что  $a \in |CD|$ , следует, что

$$\|a\| = \|CD\|.$$

Таким образом, мы установили, что при сделанных предположениях

$$\|AB\| = \|CD\|. \quad (\text{Д1.4})$$

Будем теперь рассуждать от противного. А именно, предположим, что классы  $|AB|$  и  $|CD|$  не совпадают.

Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что найдется отрезок  $x$  из класса  $|AB|$ , не принадлежащий классу  $|CD|$ . Но в силу определения (Д1.3) имеем

$$\|x\| = \|AB\|, \quad \|x\| \neq \|CD\|,$$

откуда

$$\|CD\| \neq \|AB\|,$$

что противоречит (Д1.4). ■

Нетрудно видеть, что длины отрезков, введенные с помощью соотношений вида (Д1.3), можно складывать, определив операцию сложения тем же способом, которым мы пользовались в случае точных измерений:

$$|AB| + |B_1 C_1| = |AB \oplus B C|, \quad (\text{Д1.5})$$

где

$$|BC| = |B_1 C_1|.$$

**З а м е ч а н и е.** К сожалению, определение (Д1.3), хотя оно устроено и лучше, чем (Д1.2), по-прежнему обладает одним досадным дефектом: чтобы определить длину отрезка  $AB$ , нужно для каждого отрезка  $CD$  точно знать, справедливо ли *приближенное* равенство  $CD = AB$ . Но как устранить этот дефект? Мы предоставляем читателю возможность подумать над этим самостоятельно.

## ДОБАВЛЕНИЕ 2

*Локшин А.А., Сагомонян Е.А. О размерности величин*

Как известно, в механике основными, или первичными, величинами принято считать длину, время и массу, а остальные величины считаются вторичными, или производными.

Выбор именно длины, времени и массы в качестве основных механических величин не является единственно возможным. (Выше мы уже говорили о том, что в принципе время и массу можно было бы измерять в единицах длины, а также о том, что это повлекло бы за собой определенные неудобства.) Существенно, однако, что все эти три величины могут измеряться *независимо* друг от друга соответственно с помощью линейки, песочных часов и рычажных весов (которые мы, обсудив возникающие логические тонкости, все же предпочтем пружинным весам).

Не менее существенно также и то, что измерение *всех* остальных величин, встречающихся в механике (и геометрии) можно свести к измерению длины, времени и массы и последующим вычислениям.

В этом добавлении мы исследуем характер связи между единицами измерения основных и вторичных механических величин и введем важнейшее для механики и физики понятие размерности.

Для простоты мы будем проводить наши рассуждения, ограничиваясь случаем чисто геометрических величин; переход к более общему случаю не составляет труда.

Итак, пусть  $A$  — аддитивная геометрическая величина, подчиняющаяся аксиомам Колмогорова — Александрова, и пусть  $E$  — единица измерения этой величины. Тогда, как мы знаем, можно написать

$$A = aE, \quad (Д2.1)$$

где  $a$  — численное значение величины  $A$  при единице измерения  $E$ .

Будем считать, что при заданной единице длины  $L$  измерение величины  $A$  сводится к измерению длин  $X_1, \dots, X_n$ , т. е. установлению равенств

$$X_i = x_i L \quad (i = 1, \dots, n) \quad (Д2.2)$$

и последующему вычислению, причем вычислительная процедура явно от  $L$  не зависит:

$$a = f(x_1, \dots, x_n). \quad (\text{Д2.3})$$

Очевидно, что единица  $E$  величины  $A$  является, вообще говоря, зависящей от выбора единицы длины; характер этой зависимости мы и собираемся установить.

Пусть  $A'$  — геометрическая величина того же рода, что и  $A$ ; аналогично (Д2.1) мы можем написать

$$A' = a'E, \quad (\text{Д2.1}')$$

$$X'_i = x'_i L \quad (i=1, \dots, n), \quad (\text{Д2.2}')$$

$$a' = f(x'_1, \dots, x'_n). \quad (\text{Д2.3}')$$

(Здесь  $X'$  — длины, которые необходимо измерить, чтобы вычислить численное значение  $a'$  величины  $A'$ .)

Заметим теперь следующее. Так как

$$\frac{A'}{A} = \frac{a'}{a} = \frac{f(x'_1, \dots, x'_n)}{f(x_1, \dots, x_n)} \quad (\text{Д2.4})$$

и отношение величин  $A'/A$  не зависит от выбора каких-либо единиц измерения; то, очевидно, и отношение в правой части (Д2.4) не может зависеть от выбора единицы длины.

Введем теперь новую единицу длины

$$\tilde{L} = \frac{L}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (\text{Д2.5})$$

Тогда численные значения длин  $X_i$  и  $X'_i$ , очевидно, умножатся на  $\alpha$ :

$$X_i = x_i L = \alpha x_i \tilde{L},$$

$$X'_i = x'_i L = \alpha x'_i \tilde{L}$$

и в соответствии с отмеченным выше свойством отношения из первой части (Д2.4), мы будем иметь

$$\frac{f(x'_1, \dots, x'_n)}{f(x_1, \dots, x_n)} = \frac{f(\alpha x'_1, \dots, \alpha x'_n)}{f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)},$$

или, что то же самое,

$$\frac{f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)} = \frac{f(\alpha x'_1, \dots, \alpha x'_n)}{f(x'_1, \dots, x'_n)}. \quad (\text{Д2.6})$$

В силу произвольности всех  $x_i$  и  $x'_i$ , из равенства (Д2.6), очевидно, следует, что отношение

$$\frac{f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)}$$

зависит только от параметра  $\alpha$  (и не зависит от  $x_1, \dots, x_n$ ). Обозначим это отношение через  $g(\alpha)$  и попробуем найти вид функции  $g(\alpha)$ .

Прежде всего имеем при  $\alpha, \beta > 0$

$$\frac{f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)}{f(\beta x_1, \dots, \beta x_n)} = \frac{g(\alpha)}{g(\beta)}. \quad (\text{Д2.7})$$

С другой стороны, полагая

$$x'_1 = \beta x_1, \dots, x'_n = \beta x_n,$$

очевидно, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)}{f(\beta x_1, \dots, \beta x_n)} &= \frac{f\left(\frac{\alpha}{\beta} x'_1, \dots, \frac{\alpha}{\beta} x'_n\right)}{f(x'_1, \dots, x'_n)} = \\ &= \frac{f\left(\frac{\alpha}{\beta} x_1, \dots, \frac{\alpha}{\beta} x_n\right)}{f(x_1, \dots, x_n)} = g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right). \end{aligned} \quad (\text{Д2.8})$$

(Мы воспользовались свойством (Д2.6) и определением функции  $g$ .)

Итак, из (Д2.7), (Д2.8) вытекает следующее функциональное уравнение для функции  $g$ :

$$\frac{g(\alpha)}{g(\beta)} = g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right). \quad (\text{Д2.9})$$

В курсах математического анализа доказывается, что всякое непрерывное решение функционального уравнения (Д2.9) имеет вид

$$g(\xi) = C\xi^k, \quad (\text{Д2.10})$$

где  $C$  и  $k$  — постоянные (не обязательно положительные). Заметим, однако, что из определения функции  $g$  следует, что  $g(1) = 1$ , поэтому в (Д2.10) следует положить  $C = 1$ .

Посмотрим теперь, как изменяется единица измерения величины  $A$  при переходе к новой единице длины (осуществляемой по формуле (Д2.5)). Искомую зависимость мы будем обозначать через  $E(\alpha)$ .

Имеем

$$A = aE(1) = f(x_1, \dots, x_n)E(1) = f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)E(\alpha),$$

откуда

$$\frac{E(\alpha)}{E(1)} = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)} = \frac{1}{g(\alpha)} = \alpha^q,$$

где обозначено  $q = -k$ . Итак,

$$E(\alpha) = E(1)\alpha^q. \quad (\text{Д2.11})$$

Зависимость (Д2.11), очевидно, будет иметь место, если мы воспользуемся условной записью

$$E = L^q. \quad (\text{Д2.12})$$

В общем случае аддитивной механической величины, зависящей не только от длин, но и от времен и масс, рассуждения проводятся аналогичным образом, и мы приходим к следующей условной записи для единицы такой величины:

$$E = L^q T^p M^r, \quad (\text{Д2.13})$$

где  $L, T, M$  — единицы длины, времени и массы соответственно;  $q, p, r$  — вещественные постоянные.

Выражение (Д2.13) для единицы измерения рассматриваемой величины называют *размерностью* этой величины в системе  $L, T, M$ .

Так, например, размерности площади и объема имеют соответственно вид  $L^2$  и  $L^3$ .

Размерность величины угла в системе  $L, T, M$  есть  $L^0$  ( $L$  в нулевой степени), поэтому величину угла называют *безразмерной* величиной, а единицу измерения величины угла в математических записях часто опускают. Однако это вовсе не означает, что величина угла представляет собой число!

**З а м е ч а н и е 1.** Размерность величины (в системе  $L, T, M$ ) характеризует рассматриваемую величину лишь отчасти. А именно, существуют величины разных родов, имеющие одну и ту же размерность. Например, в системе  $L, T, M$  *работа* и *момент силы* имеют размерность  $L^2 T^{-2} M$ .

Впрочем, приведенный пример является, скорее, исключением из правила, поскольку большинство механических величин (разных родов) удается отличить друг от друга именно по их размерности в  $L, T, M$ -системе.

**З а м е ч а н и е 2.** Среди механических величин встречаются также величины, не являющиеся аддитивными, к которым приведенные выше рассуждения непосредственно неприменимы. Можно доказать, однако, что соотношения вида (Д2.13) оказываются

справедливыми и для этих величин. В этой связи заметим, что важнейшие неаддитивные величины, встречающиеся в механике, представляют собой отношения аддитивных величин. Например,

$$\begin{aligned}\text{плотность} &= \frac{\text{масса}}{\text{объем}}, \\ \text{поверхностная плотность} &= \frac{\text{масса}}{\text{площадь}}, \\ \text{линейная плотность} &= \frac{\text{масса}}{\text{длина}}.\end{aligned}\tag{Д2.14}$$

Однако если некоторая величина  $B$  представляет собой отношение

$$B = \frac{B_1}{B_2},$$

где  $B_1$  и  $B_2$  — аддитивные механические величины с размерностями  $L^{q_1} T^{p_1} M^{r_1}$  и  $L^{q_2} T^{p_2} M^{r_2}$  соответственно, то размерность величины  $B$ , очевидно, будет иметь вид  $L^{q_1 - q_2} T^{p_1 - p_2} M^{r_1 - r_2}$  и тем самым будет принадлежать классу (Д2.13).

Более того, можно показать, что в  $L, T, M$ -системе размерности любых разумных механических величин должны иметь вид (Д2.13), но мы не будем останавливаться на доказательстве этого утверждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. Нойгебауэр О. Точные науки в древности. — М.: УРСС, 2003.
2. Колмогоров А.Н. Математика — наука и профессия. — М.: Наука, 1988.
3. Вернер А.Л. и др. Геометрия. Т. 1. — СПб.: Специальная литература, 1977.
4. Виленкин Н.Я. и др. Математика. — М.: Просвещение, 1977.
5. Виленкин Н.Я. О понятии величины // Математика в школе. 1975, № 4. С. 4–7.
6. Эйлер Л. Основания алгебры. — СПб., 1812.
7. Добровольский А.С. и др. Задачник-практикум по математике. Вып. 2. — М., 1985.
8. Ковригина Л.П. и др. Методические рекомендации к самостоятельной работе по математике для студентов факультета начальных классов. — М., 1990.
9. Дубнов Я.С. Измерение отрезков. — М.: Физматгиз, 1962.
10. Погорелов А.В. Основания геометрии. — М.: Наука, 1979.
11. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. — М.: Наука, 1978.
12. Камке Д., Кремер К. Физические основы единиц измерения. — М.: Мир, 1980.
13. Вейль Г. Пространство, время, материя. — М.: Янус, 1996.
14. Адамар Ж. Элементарная геометрия. — М.: Учпедгиз, 1957.
15. Завельский Ф.С. Время и его измерение. — М.: Наука, 1977.
16. Серпинский В. О теории множеств. — М.: Просвещение, 1966.
17. Фридман Л.М. Величины и числа. — М.: Флинта, 2000.
18. Фейнман Р. и др. Фейнмановские лекции по физике. Т. 1. — М.: Мир, 1967.
19. Куколев В.Г. Величины и числа. — Пермь, 1975.
20. Хокинз С. Краткая история времени. — СПб.: АМФОРА/ЭВРИКА, 2001.
21. Паболкова Н.Н. Подготовка будущих учителей начальных классов к работе по усвоению систем величин и их измерения. Дис. ... канд. пед. наук. — М.: МПГУ, 2004.